Ministerul Educației și Cercetării

Societatea de Științe Matematice din România

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

## CLASA a IX-a

**Problema 1.** Fie $ABCD$ un paralelogram şi $O$ intersecţia diagonalelor. Demonstraţi că pentru orice punct $M \in (AB)$, există în mod unic punctele $N \in (OC)$ şi $P \in (OD)$ astfel încât $O$ este centrul de greutate al triunghiului $MNP$.

**Problema 2.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0,$$

unde $[x]$ şi $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fraţionară a numărului real $x$.

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Determinați numerele reale pozitive $a$, $b$, $c$, $d$ astfel încât $a+b+c+d = 80$ și

$$a + \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a+b} + \frac{d}{1+a+b+c} = 8.$$

**Problema 4.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător nemărginit de numere naturale cu $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} \leq 2x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstraţi că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă finită de termeni distincţi doi câte doi ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

*Notă:* Doi termeni $x_i$ şi $x_j$ ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ se numesc distincți dacă $i \neq j$.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025**

**CLASA a IX-a – soluţii**

**Problema 1.** Fie $ABCD$ un paralelogram şi $O$ intersecţia diagonalelor. Demonstraţi că pentru orice punct $M \in (AB)$, există în mod unic punctele $N \in (OC)$ şi $P \in (OD)$ astfel încât $O$ este centrul de greutate al triunghiului $MNP$.

*Soluţie.* Un punct $M \in (AB)$ este unic determinat de $k \in (0, \infty)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = k$, de unde avem $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB}$. .............................................. **2 puncte**

Pentru a găsi punctele $N$ şi $P$ în mod unic, trebuie să găsim $x, y \in (0, \infty)$ în mod unic astfel încât $\frac{ON}{NC} = x$, $\frac{OP}{PD} = y$ şi $O$ este centrul de greutate al triunghiului $MNP$. ......... **2 puncte**

De aici avem $\overrightarrow{ON} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{OC} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OP} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{OD} = -\frac{y}{y+1}\overrightarrow{OB}$. ........... **1 punct**

Deoarece $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari, $O$ este centrul de greutate al triunghiului $MNP$ dacă şi numai dacă $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$ şi $\frac{y}{y+1} = \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow y = k$, adică punctul $N$ este unic determinat de raportul $x = \frac{1}{k} = \frac{ON}{NC}$, iar punctul $P$ este unic determinat de raportul $y = k = \frac{OP}{PD}$, ceea ce încheie problema. ............................................................ **2 puncte**

**Problema 2.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0,$$

unde $[x]$ şi $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fraţionară a numărului real $x$.

*Gazeta Matematică*

*Soluţie.* Din condiţiile de existenţă, $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cup [0, 1))$. .......................... **1 punct**

Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu:

$$\frac{[x] + \{x\}}{[x]\{x\}} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -x^2 = [x]\{x\}. \qquad (\star)$$

.................................................................................. **1 punct**

Deoarece $-x^2 \leq 0$ şi $x \neq 0$, avem că $[x]\{x\} < 0$, deci $[x] \leq -1$. .................... **1 punct**

Dacă $[x] = -k$, $k \in \mathbb{N}^\star$, ecuaţia $(\star)$ devine $-x^2 = -k(k + x)$, ceea ce este echivalent cu $x^2 - kx - k^2 = 0$, având soluţiile $x_{1,2} = \frac{k \pm k\sqrt{5}}{2}$. Din $[x] = -k$, obţinem că singura soluţie posibilă ar fi $x_1 = \frac{k - k\sqrt{5}}{2}$. ...................................................... **2 puncte**

În final, trebuie să găsim valorile lui $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\left[\frac{k-k\sqrt{5}}{2}\right] = -k$, ceea ce este echivalent cu:

$$-k \leq k\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -k + 1 \Leftrightarrow 3k \geq k\sqrt{5} > 3k - 2,$$

de unde obţinem $k < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, adică $k \in \{1, 2\}$. De aici obţinem soluţiile $x_1^\star = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $x_2^\star = 1-\sqrt{5}$, care verifică ecuaţia dată. ........................................................ **2 puncte**

**Problema 3.** Determinați numerele reale pozitive $a$, $b$, $c$, $d$ astfel încât $a+b+c+d = 80$ și

$$a + \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a+b} + \frac{d}{1+a+b+c} = 8.$$

*Soluţie.* A două relaţie după adunare cu 4 în ambii membri se scrie:

$$1 + a + \frac{1+a+b}{1+a} + \frac{1+a+b+c}{1+a+b} + \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} = 12.$$

........................................................................ **2 puncte**

Aplicând inegalitatea mediilor succesiv obţinem:

$$1 + a + \frac{1+a+b}{1+a} \geq 2\sqrt{(1+a)\cdot\frac{1+a+b}{1+a}} = 2\sqrt{1+a+b};$$

$$\frac{1+a+b+c}{1+a+b} + \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} \geq 2\sqrt{\frac{1+a+b+c}{1+a+b}\cdot\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c}} = 2\sqrt{\frac{81}{1+a+b}}.$$

........................................................................ **2 puncte**

Prin adunarea celor două inegalităţi şi aplicând din nou inegalitatea mediilor se ajunge la:

$$12 = 1 + a + \frac{1+a+b}{1+a} + \frac{1+a+b+c}{1+a+b} + \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} \geq 2\sqrt{1+a+b} + \frac{18}{\sqrt{1+a+b}} \geq 12.$$

........................................................................ **1 punct**

Observăm că avem egalitate în inegalitatea mediilor în toate cele trei cazuri de mai sus. De aici obţinem $a + b = 8$, respectiv $1 + a = \frac{1+a+b}{1+a} = \frac{1+a+b+c}{1+a+b} = \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} = 3$. Aşadar, numerele căutate sunt $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$, $d = 54$. ........................................ **2 puncte**

**Problema 4.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător nemărginit de numere naturale cu $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} \leq 2x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstraţi că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă finită de termeni distincţi doi câte doi ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

*Notă:* Doi termeni $x_i$ şi $x_j$ ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ se numesc distincți dacă $i \neq j$.

*Soluţie.* Fie $k$ un număr natural nenul astfel încât $1 \leq k < 2x_n$ pentru un $n \geq 1$ natural. Vom demonstra prin inducţie că putem scrie $k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$ cu $\varepsilon_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}$. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit, putem acoperi toate numerele naturale nenule cu această construcţie. ........................................................................ **2 puncte**

Afirmaţia de mai sus este adevărată pentru $n = 1$.

Presupunem că am demonstrat-o pentru $n = N$. Vom demonstra în continuare că orice $1 \leq k < 2x_{N+1}$ se poate scrie $k = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$ cu $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, N+1}$. .............. **1 punct**

Dacă $x_N = x_{N+1}$, atunci avem din ipoteza din inducţie $k = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i x_i$ şi putem scrie $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$, cu $\alpha_i = \varepsilon_i$, $i = \overline{1,N}$, şi $\alpha_{N+1} = 0$. .................................................. **1 punct**

Dacă $x_N < x_{N+1}$, este suficient să considerăm valorile lui $k$ pentru care $2x_N \leq k < 2x_{N+1}$, deoarece cazul $k < 2x_N$ este acoperit de ipoteza de inducţie. ........................ **1 punct**

În acest fel, $k - x_{N+1} \geq 2x_N - x_{N+1} \geq 0$ conform ipotezei problemei. Distingem două cazuri:

**Cazul 1.** Dacă $k - x_{N+1} = 0$, afirmaţia este evident adevărată.

**Cazul 2.** Dacă $k - x_{N+1} > 0$, folosim din nou ipoteza problemei şi, din condiţia:

$$0 < k - x_{N+1} < 2x_{N+1} - x_{N+1} \leq 2x_N,$$

conform ipotezei de inducţie, putem scrie $k - x_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i x_i$ cu $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1,N}$. Adunăm $x_{N+1}$ în ambele părţi ale egalităţii precedente şi considerăm $\alpha_i = \varepsilon_i$ pentru $i = \overline{1,N}$ şi $\alpha_{N+1}$=1. Inducţia se încheie. ............................................................ **2 puncte**

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

## CLASA a X -a

**Problema 1.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1).$$

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Aflaţi numerele reale $x$ pentru care

$$3^x + 3^{[x]} + 3^{\{x\}} = 4.$$

($[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară ale numărului real $x$.)

**Problema 3.** Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că

$$|wf(z) + zf(w)| = 2|zw|$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

**Problema 4.** Fie $ABCDEF$ un hexagon convex cu $\angle A \equiv \angle C \equiv \angle E$ şi $\angle B \equiv \angle D \equiv \angle F$.

a) Demonstraţi că există un unic punct în plan care este egal depărtat de laturile $AB, CD$ şi $EF$ ale hexagonului.

b) Dacă notăm cu $P$ punctul de la a), iar $G_1 \neq G_2$ sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $ACE$ respectiv $BDF$, arătaţi că $\measuredangle G_1PG_2 = 60°$.

*Timp de lucru 3 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025**

**CLASA a X-a – soluţii**

**Problema 1.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\log_7(6^x+1)=\log_6(7^x-1).$$

*Gazeta Matematică*

*Soluţia 1.* Notând $\log_7(6^x+1)=\log_6(7^x-1)=y$, obţinem sistemul $6^x+1=7^y$ şi $7^x-1=6^y$. ................................ **2p**

Prin adunare deducem că $6^x+7^x=6^y+7^y$. Din injectivitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6^x+7^x$ (care este strict crescătoare, ca sumă de două funcţii strict crescătoare), obţinem că $x=y$. ................................ **2p**

Determinarea lui $x$ se reduce la rezolvarea ecuaţiei $6^x+1=7^x$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$. Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x$; relaţia precedentă se scrie sub forma $g(x)=g(1)$. Ţinând cont de injectivitatea funcţiei $g$ (care este strict descrescătoare, ca sumă de două funcţii strict descrescătoare), conchidem că $x=1$, valoare care verifică ecuaţia din enunţ. ................................ **3p**

*Soluţia 2.* Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=\log_7(6^x+1)$. Se arată că funcţia $f$ este inversabilă, cu inversa $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\log_6(7^x-1)$. ................................ **2p**

Ecuaţia dată devine $f(x)=f^{-1}(x)$, iar aceasta este echivalentă cu $f(x)=x$, unde $x\in(0,\infty)$. ................................ **2p**

Determinarea lui $x$ se reduce la rezolvarea ecuaţiei $6^x+1=7^x$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$. Considerăm funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x$; relaţia precedentă se scrie sub forma $g(x)=g(1)$. Ţinând cont de injectivitatea funcţiei $g$ (care este strict descrescătoare, ca sumă de două funcţii strict descrescătoare), conchidem că $x=1$ este unica soluţie soluţie a ecuaţiei din enunţ. ................................ **3p**

**Problema 2.** Aflaţi numerele reale $x$ pentru care

$$3^x+3^{[x]}+3^{\{x\}}=4.$$

($[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară ale numărului real $x$.)

*Soluţie.* Nu există numere $x\in[1,\infty)$ cu proprietatea din enunţ: dacă $x\geq 1$, atunci $[x]\geq 1$ şi, cum $\{x\}\in[0,1)$, obţinem $4=3^x+3^{[x]}+3^{\{x\}}\geq 3+3+1=7$, fals. ................................ **1p**

Nu există nici numere $x \in (-\infty, -1)$ cu proprietatea din enunţ: dacă $x < -1$, atunci $[x] \leq -2$ şi, cum $\{x\} \in [0,1)$, obţinem $4 = 3^x + 3^{[x]} + 3^{\{x\}} < 3^{-1} + 3^{-2} + 3^1 = 3\frac{4}{9}$, fals. ............ **2p**

Dacă $x \in [0,1)$, atunci $[x] = 0$, $\{x\} = x$, deci egalitatea dată devine $3^x + 1 + 3^x = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 3$. Obţinem soluţia $x_1 = 1 - \log_3 2$, care aparţine intervalului $[0,1)$. ............... **2p**

Dacă $x \in [-1,0)$, atunci $[x] = -1$, $\{x\} = x+1$, deci egalitatea dată devine $3^x + \frac{1}{3} + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x = \frac{11}{3}$. Obţinem soluţia $x_2 = \log_3 \frac{11}{12}$, care aparţine intervalului $[-1,0)$.

În concluzie, există două numere reale, $x_1$ şi $x_2$, care au proprietatea din enunţ. ....... **2p**

**Problema 3.** Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că

$$|wf(z) + zf(w)| = 2|zw|$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

*Soluţie.* Dacă $f$ este o funcţie cu proprietatea din enunţ, luând $z = 1$ şi $w = 0$ în relaţia dată, deducem că $f(0) = 0$. Pentru $w = z \in \mathbb{C}^*$ obţinem că $|f(z)| = |z|$; cum această egalitate se verifică şi pentru $z = 0$, rezultă că $|f(z)| = |z|$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. ...................... **2p**

Atunci $|f(1)| = 1$ şi, pentru $w = 1$ în ecuaţia funcţională, obţinem

$$2|z| = |f(z) + zf(1)| \leq |f(z)| + |zf(1)| = 2|z|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. .................................................................... **2p**

Rezultă că avem egalitate în inegalitatea triunghiului. Prin urmare, pentru fiecare $z \in \mathbb{C}$, există $t_z \in \mathbb{R}$, $t_z \geq 0$ ($t_z$ depinde de $z$), astfel încât $f(z) = t_z \cdot f(1)z$. Trecând la modul şi simplificând, deducem că $|f(z)| = t_z \cdot 1 \cdot |z| \Leftrightarrow 1 = t_z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^*$.

În concluzie, $f(z) = cz$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, unde $c = f(1)$ este un număr complex de modul 1. .......................................................................................... **2p**

Se verifică imediat faptul că orice funcţie de forma $f(z) = cz$, unde $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, este soluţie a ecuaţiei funcţionale din enunţ. ................................................ **1p**

**Problema 4.** Fie $ABCDEF$ un hexagon convex cu $\angle A \equiv \angle C \equiv \angle E$ şi $\angle B \equiv \angle D \equiv \angle F$.

a) Demonstraţi că există un unic punct în plan care este egal depărtat de laturile $AB, CD$ şi $EF$ ale hexagonului.

b) Dacă notăm cu $P$ punctul de la a), iar $G_1 \neq G_2$ sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $ACE$ respectiv $BDF$, arătaţi că $\measuredangle G_1PG_2 = 60°$.

*Soluţie.*

a) Dacă notăm $\measuredangle A = \measuredangle C = \measuredangle E = \alpha$ şi $\measuredangle B = \measuredangle D = \measuredangle F = \beta$, atunci suma măsurilor unghiurilor hexagonului $ABCDEF$ este $3\alpha + 3\beta = 720°$, aşadar $\alpha + \beta = 240°$.

.......................................................................................... **1p**

Deoarece $\measuredangle B + \measuredangle C = \alpha + \beta = 240°$, dreptele $AB$ şi $CD$ se vor intersecta într-un punct situat în exteriorul hexagonului. Analog pentru dreptele $CD$ şi $EF$, respectiv $EF$ şi $AB$.

Notăm $\{X\} = AB \cap CD, \{Y\} = CD \cap EF$, $\{Z\} = EF \cap AB$. Centrul cercului înscris în triunghiul $XYZ$ este unicul punct egal depărtat de laturile $AB, CD$ şi $EF$ ale hexagonului.

.......................................................................................... **2p**

b) Triunghiul $XYZ$ are toate unghiurile de $60°$, deci este echilateral, iar $P$ este centrul său. În planul complex, considerăm un reper cu originea în $P$ şi notăm cu literă mică afixul unui punct notat, corespunzător, cu litera mare. Din asemănarea $\Delta BCX \sim \Delta DEY \sim \Delta FAZ$ (u.u.), deducem că există $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ astfel încât

$$\frac{c-x}{b-x} = \frac{e-y}{d-y} = \frac{a-z}{f-z} = k \cdot \epsilon,$$

unde $\epsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Obţinem că $c - x = (b-x)k \cdot \epsilon,\ e - y = (d-y)k \cdot \epsilon,\ a - z = (f-z)k \cdot \epsilon$.

........................................................................................ **2p**

Deoarece $p = \dfrac{x+y+z}{3} = 0$, prin adunare, deducem $c+e+a = (b+d+f) \cdot k \cdot \epsilon \Leftrightarrow g_1 = g_2 \cdot k \cdot \epsilon$.

Din ipoteza că $G_1 \neq G_2$ rezultă că $g_1$ şi $g_2$ nu pot fi 0, deci $G_1, G_2, P$ sunt puncte distincte două câte două.

Aşadar $\dfrac{g_1 - p}{g_2 - p} = k \cdot \epsilon$, adică $\measuredangle G_1PG_2 = 60°$. .......................................... **2p**

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

## CLASA a XI-a

**Problema 1.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \log_2(1+a_k) = 2$.

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă $\det(A+X_{ij}) = \det(A+X_{ji})$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea care are 1 pe poziţia $(i, j)$ şi 0 în rest.

a) Arătaţi că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ şi $\det(A) \neq 0$, atunci $A = A^T$.

b) Daţi un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$.

**Problema 3.** Fie $f : [0.\infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă şi bijectivă, astfel ca

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, pentru oricare $a > 0$. .

b) Daţi un exemplu de funcţie $f$ care satisface condiţiile din enunţ.

**Problema 4.** Determinaţi toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{aligned} A &= BC - CB \\ B &= CA - AC \\ C &= AB - BA \end{aligned} \quad .$$

*Timp de lucru 3 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025**

**CLASA a XI-a – soluţii**

**Problema 1.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \log_2(1+a_k) = 2$.

*Gazeta Matematică*

*Soluţie.* Avem $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (inducţie) şi $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita $\ell \in [0,1)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\ell = \dfrac{\ell}{1+\sqrt{1+\ell}}$, de unde $\ell = 0$ .......... **1p**

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\sqrt{1+a_n}) = 2$ .......... **1p**

Din relaţia de recurenţă rezultă $1 + a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .......... **2p**

Atunci $\log_2(1+a_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\log_2(1+a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\log_2(1+a_1) = \log_2 2 = 1$, obţinem $\log_2(1+a_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (progresie geometrică cu primul termen 1 şi raţia 1/2) ...... **1p**

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \log_2(1+a_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 2$ .......... **2p**

**Problema 2.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă $\det(A + X_{ij}) = \det(A + X_{ji})$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea care are 1 pe poziţia $(i, j)$ şi 0 în rest.

a) Arătaţi că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ şi $\det(A) \neq 0$, atunci $A = A^T$.

b) Daţi un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$.

*Soluţie.*

a) Fie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prin dezvoltare după linia $i$, obţinem $\det(A + X_{ij}) = \det(A) + \delta_{ij}$, unde $\delta_{ij}$ este complementul algebric al elementului de pe poziţia $(i, j)$ al matricei $A$ ........ **1p**

Cum $A$ are proprietatea $(\mathcal{P})$, rezultă $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deci $A^*$ (adjuncta lui $A$) este matrice simetrică .......... **1p**

Notăm $d = \det(A) \neq 0$. Avem $AA^* = dI_n = (dI_n)^T = (A^*A)^T = A^T(A^*)^T = A^TA^*$. ........ **2p**

Cum $d\det(A^*) = \det(AA^*) = \det(dI_n) = d^n$, iar $d \neq 0$, rezultă că matricea $A^*$ este inversabilă. Atunci, din relaţia $AA^* = A^TA^*$, rezultă $A = A^T$ .......... **1p**

b) Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matricea care are 1 pe poziţiile (1,1) şi (1,2) şi 0 în rest. Cum $n \geq 3$, matricea $A + X_{ij}$ are cel puţin o linie nulă, deci $\det(A + X_{ij}) = 0$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Rezultă că $A$ are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$ .......... **2p**

**Problema 3.** Fie $f : [0.\infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă şi bijectivă, astfel ca

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

a) Arătaţi că $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ şi $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, pentru oricare $a > 0$.

b) Daţi un exemplu de funcţie $f$ care satisface condiţiile din enunţ.

*Soluţie.*

a) Avem $f(0) = 0$ (reducere la absurd). Atunci, pe baza ipotezei, deducem că $f$ este strict crescătoare, cu $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, iar $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este strict crescătoare, cu $f^{-1}(0) = 0$ şi $\lim_{x\to\infty} f^{-1}(x) = \infty$ ........ **1p**

Limita din ipoteză asigură existenţa unui număr $u > 0$ astfel încât $\frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} > \frac{1}{2}$, $\forall\, x > u$. Rezultă $\frac{f(x)}{x} > f\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall\, x > u$. Cum $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{x}{2}\right) = \infty$, obţinem $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ........ **2p**

Fie $a > 0$, arbitrat, fixat.

*Cazul* $a = 1$ este clar.

*Cazul* $a \in (0, 1)$. Există $t > 0$ astfel ca $f^{-1}(x) > \frac{1}{a}$, $\forall\, x > t$. Rezultă

$$f^{-1}(x) > f^{-1}(ax) = f^{-1}(af(f^{-1}(x)) > f^{-1}\left(\frac{f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)}\right), \ \forall\, x > t.$$

Obţinem

$$\frac{f^{-1}\left(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x)\right)}{f^{-1}(x)} < \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} < 1, \ \forall\, x > t.$$

Pe baza ipotezei şi condiţiei $\lim_{x\to\infty} f^{-1}(x) = \infty$, obţinem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}\left(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x)\right)}{f^{-1}(x)} \overset{y=f^{-1}(x)}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{f^{-1}(f(y)/y)}{y} = 1.$$

Atunci, conform *criteriului cleşte*, rezultă $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$.

*Cazul* $a \in (1, \infty)$. Atunci $b = 1/a \in (0, 1)$. Conform cazului anterior, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f^{-1}(b(ax))}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Rezultă $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, $\forall\, a > 0$ ........ **2p**

b) Exemplu. Funcţia bijectivă $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = e^x - 1$, $x \in [0, \infty)$, cu inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$ satisface condiţiile din enunţ ........ **2p**

**Problema 4.** Determinaţi toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{cases} A = BC - CB \\ B = CA - AC \\ C = AB - BA \end{cases}.$$

*Soluţia 1.* Dacă una dintre matricele $A, B, C$ este nulă, atunci $A = B = C = O_2$ ........ **1p**
Presupunem că există matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ care satisfac ecuaţiile din enunţ.
Din $\mathrm{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\mathrm{tr}(A) = 0$. Similar, $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(C) = 0$ ........ **1p**
Din ecuaţia $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, rezultă $A^2 = aI_2$, unde $a = -\det(A)$.
Similar, $B^2 = bI_2$ şi $C^2 = cI_2$, cu $b = -\det(B)$ şi $c = -\det(C)$ ........ **1p**
Înmulţind ecuaţia $A = BC - CB$ cu $B$ la stânga şi respectiv la dreapta, obţinem relaţiile $BA = B^2C - BCB = bC - BCB$ şi $AB = BCB - CB^2 = BCB - bC$. Atunci $AB + BA = O_2$, iar din ecuaţia $C = AB - BA$, rezultă $C = 2AB$. Similar, $A = 2BC$ şi $B = 2CA$ ........ **1p**
Atunci $A = -2CB = -2C(2CA) = -4C^2A = -4cA$. Similar, $B = -4aB$ şi $C = -4bC$ ..... **1p**
Cum matricele $A, B$ şi $C$ sunt presupuse nenule, obţinem $a = b = c = -1/4$, deci avem $\det(A) = \det(B) = \det(C) = 1/4$. Rezultă că matricele $A$ şi $B$ sunt de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & -s \end{pmatrix}$, cu $x, y, z, s, t, u \in \mathbb{R}$, astfel încât $x^2 + yz = -1/4$ şi $s^2 + tu = -1/4$.
Din relaţia $AB + BA = O_2$ rezultă $2xs = -(yu + zt)$. Obţinem:

$$4x^2s^2 = (yu + zt)^2 = (yu - zt)^2 + 4yztu \geq 4(yz)(tu) = 4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Dar $x^2s^2 < \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)$, $\forall\, x, s \in \mathbb{R}$. Contradicţie.
Prin urmare, soluţia unică a sistemului din enunţ este $A = B = C = O_2$ ........ **2p**

*Soluţia 2.* Fie trei matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac sistemul de ecuaţii din enunţ.
Din $\mathrm{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\mathrm{tr}(A) = 0$. Similar, $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(C) = 0$ ........ **1p**
Atunci $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & -c_1 \end{pmatrix}$, cu $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.
........ **1p**
Obţinem $BC - CB = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & 2(b_1c_2 - b_2c_1) \\ 2(b_3c_1 - b_1c_3) & -(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$ ........ **1p**
Deci $a_2 = 2(b_1c_2 - b_2c_1)$, de unde $a_2^2 = 2a_2(b_1c_2 - b_2c_1) = 2a_2b_1c_2 - 2a_2b_2c_1$. Similar, obţinem: $b_2^2 = 2b_2c_1a_2 - 2b_2c_2a_1$ şi $c_2^2 = 2c_2a_1b_2 - 2c_2a_2b_1$. Rezultă $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0$. Cum $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, obţinem: $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ ........ **2p**
Analog arătăm $a_3 = b_3 = c_3 = 0$. Atunci $a_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = 0$. Similar, $b_1 = c_1 = 0$.
Prin urmare, soluţia unică a sistemului din enunţ este $A = B = C = O_2$ ........ **2p**

Ministerul Educației și Cercetării

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

## CLASA a XII-a

**Problema 1.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, cu elementul neutru $e$, iar $A$ o submulţime nevidă a sa. Notăm cu $AA=\{xy|\, x,y\in A\}$.
a) Arătaţi că dacă $G$ este finit, atunci $AA=A$ dacă şi numai dacă $e\in A$ şi $|AA|=|A|$.
b) Daţi un exemplu de grup $G$ şi o submulţime $A\subseteq G$, cu $AA\neq A$, $|AA|=|A|$ şi $AA<G$.
(Notaţia $H<G$ înseamnă că $H$ este un subgrup propriu al grupului $G$, adică un subgrup al lui $G$ diferit de grupul $G$.)

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, iar $H<G$ un subgrup propriu al lui $G$. Dacă există morfisme $f,g,h:G\longrightarrow G$ ale grupului $G$, cu proprietatea că $f(xy)=g(x)h(y)$ pentru orice $x,y\in G\setminus H$, arătaţi că:
a) $g=h$;
b) dacă $G$ este neabelian, iar $H=Z(G)$, atunci $f=g=h$.
(Mulţimea $Z(G)=\{c\in G|\, cx=xc,\ \forall x\in G\}$ se numeşte centrul grupului $G$.)

**Problema 3.** a) Fie $a,b\in\mathbb{R}$ două numere reale, cu $a<b$, iar $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă cu proprietatea că $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$. Arătaţi că $f(a)\cdot f(b)<0$.
b) Determinaţi şirurile convergente $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, pentru care există o funcţie strict monotonă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx\,,\quad \text{pentru orice } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

**Problema 4.** Fie $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Definim funcţia $\tilde{f}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & ,\ \text{dacă } x>0,\\ f(0) & ,\ \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Arătaţi că:
a) funcţia $\tilde{f}$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0,1]$;
b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2+\int_0^1\left(f(x)-\tilde{f}(x)\right)^2\,dx.$$

*Timp de lucru 3 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025**

**CLASA a XII-a – soluţii**

**Problema 1.** Fie $(G, \cdot)$ un grup, cu elementul neutru $e$, iar $A$ o submulţime nevidă a sa. Notăm cu $AA = \{xy|\, x, y \in A\}$.
a) Arătaţi că dacă $G$ este finit, atunci $AA = A$ dacă şi numai dacă $e \in A$ şi $|AA| = |A|$.
b) Daţi un exemplu de grup $G$ şi o submulţime $A \subseteq G$, cu $AA \neq A$, $|AA| = |A|$ şi $AA < G$.
(Notaţia $H < G$ înseamnă că $H$ este un subgrup propriu al grupului $G$, adică un subgrup al lui $G$ diferit de grupul $G$.)

*Gazeta Matematică*

**Soluţie.**
a) Dacă $AA = A$, atunci $|AA| = |A|$. Pentru orice $x \in A$ avem că $|xA| = |A| < \infty$ şi $xA \subseteq AA = A$, astfel că $xA = A$. Dar atunci $x \in xA$, astfel că $e = x^{-1} \cdot x \in x^{-1} \cdot xA = A$.
........ **2p**
Reciproc, dacă $e \in A$ şi $|AA| = |A|$, avem că $A = e \cdot A \subseteq AA$ şi cum $|A| = |AA| < \infty$, rezultă că $AA = A$. ........ **2p**
b) Fie $G = U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 4 ale unităţii. Considerând $A = \{i, -i\}$, avem că $AA = \{i^2, i \cdot (-i), (-i)^2\} = \{1, -1\} = U_2 < U_4$, $|AA| = 2 = |A|$ şi $AA \neq A$ (mai mult, $AA \cap A = \emptyset$). ........ **3p.**

**Problema 2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $H < G$ un subgrup propriu al lui $G$. Dacă există morfisme $f, g, h : G \longrightarrow G$ ale grupului $G$, cu proprietatea că $f(xy) = g(x)h(y)$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, arătaţi că:
a) $g = h$;
b) dacă $G$ este neabelian, iar $H = Z(G)$, atunci $f = g = h$.
(Mulţimea $Z(G) = \{c \in G|\, cx = xc, \forall x \in G\}$ se numeşte centrul grupului $G$.)

**Soluţie.**
a) Notând cu $e$ elementul neutru al grupului $G$, pentru orice $x \in G \setminus H$ avem că $x^{-1} \in G \setminus H$, astfel că

$$e = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = g(x) \cdot h(x^{-1}) = g(x) \cdot h(x)^{-1},$$

de unde rezultă că $g(x) = h(x)$ pentru orice $x \in G \setminus H$. ........ **2p**
Pentru orice $a \in H$, alegând un $x \in G \setminus H$ avem că $ax, x^{-1} \in G \setminus H$, astfel că:

$$g(a) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(ax) \cdot g(x^{-1}) = h(ax) \cdot h(x^{-1}) = h(ax \cdot x^{-1}) = h(a).$$

Rezultă deci că $g = h$. ........ **2p**
b) Fie $G$ neabelian şi $H = Z(G)$. Ţinând cont de punctul anterior avem că $g = h$, astfel că relaţia din enunţ devine

$$f(xy) = g(x)g(y) = g(xy) \qquad \text{pentru orice } x, y \in G \setminus Z(G).$$

Pentru orice $a \in Z(G)$ şi $x \in G \setminus Z(G)$, avem $ax, x^{-1} \in G \setminus Z(G)$, astfel că:

$$f(a) = f(ax \cdot x^{-1}) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(a).$$

.................................................................................................**1p**

Fie $x \in G \setminus Z(G)$. Atunci există $y \in G \setminus Z(G)$ cu proprietatea că $xy \neq yx$. Dacă $xy \in Z(G)$ atunci am avea

$$xy = y(xy)y^{-1} = yx \neq xy,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare, $xy \in G \setminus Z(G)$, şi, cum $y^{-1} \in G \setminus Z(G)$, avem:

$$f(x) = f(xy \cdot y^{-1}) = g(xy \cdot y^{-1}) = g(x).$$

Rezultă că $f = g$ şi deci $f = g = h$. ........................................................ **2p**

**Problema 3.** a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale, cu $a < b$, iar $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă cu proprietatea că $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Arătaţi că $f(a) \cdot f(b) < 0$.

b) Determinaţi şirurile convergente $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale, pentru care există o funcţie strict monotonă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx\,, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

**Soluţie**.

a) Dacă $f([a, b]) \subseteq [0, \infty)$ sau $f([a, b]) \subseteq (-\infty, 0]$, atunci $m = \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| > 0$, iar pe unul dintre intervalele $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ sau $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ are loc inegalitatea $|f(x)| > m$ pentru orice $x$ din acel interval. Atunci

$$0 = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,dx \geq m \cdot \frac{b-a}{2} > 0\,,$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că $f(a) \cdot f(b) < 0$. ........................................ **1p**

b) Vom arăta că singurele şiruri de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ care verifică condiţia din enunţ sunt şirurile constante şi şirurile care iau exact două valori reale distincte şi care devin staţionare începând cu un anumit rang.

În mod evident, dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este un şir constant, cu $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci şirul este convergent, cu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ şi $\displaystyle\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$ şi orice funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $\{a_n | \, n \geq 1\} = \{a, b\}$ şi există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n = a$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, şi există funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - a - b$, care este strict monotonă şi verifică egalităţile $\displaystyle\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$.

.................................................................................................**1p**

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale pentru care există o funcţie strict monotonă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx = \ldots = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \ldots .$$

Fie $I = \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$ pentru orice $k\geq 1$ şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru un $r>0$ fixat există atunci un rang $n_r\geq 1$, astfel încât $a_n\in(a-r,a+r)$ pentru orice $n\geq n_r$. Cum $f$ este strict monotonă, dacă $M=\max(|f(a-r)|,|f(a+r)|)$, atunci $|f(x)|<M$ pentru orice $x\in(a-r,a+r)$. Pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$ avem:

$$p\cdot|I| = |p\cdot I| = \left|\sum_{k=1}^{p}\int_{a_{n_r+k-1}}^{a_{n_r+k}} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} f(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} |f(x)|\,dx\right| < \int_{a-r}^{a+r} |f(x)|\,dx \leq 2r\cdot M.$$

Rezultă că $0\leq |I| < \dfrac{2Mr}{p}$, oricare ar fi $p\in\mathbb{N}^*$, astfel că $I=0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

Arătăm că $card(\{a_n | n\in\mathbb{N}^*\})\leq 2$. Presupunând contrariul, ar exista $i,j,k\in\mathbb{N}^*$, cu $i<j<k$ astfel încât $a_i\neq a_j\neq a_k\neq a_i$. Avem că

$$\int_{a_i}^{a_j} f(x)\,dx = \sum_{l=i}^{j-1}\int_{a_l}^{a_{l+1}} f(x)\,dx = (j-i)\cdot I = 0$$

şi, de asemenea, $\int_{a_j}^{a_k} f(x)\,dx = (k-j)\cdot I = 0$, respectiv $\int_{a_i}^{a_k} f(x)\,dx = 0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Funcţia $f$ fiind strict monotonă, rezultă atunci că
$f(a_i)\cdot f(a_j)<0$, $f(a_i)\cdot f(a_k)<0$ şi $f(a_j)\cdot f(a_k)<0$. Dar atunci

$$(f(a_i)\cdot f(a_j)\cdot f(a_k))^2 = (f(a_i)\cdot f(a_j))\cdot(f(a_i)\cdot f(a_k))\cdot(f(a_j)\cdot f(a_k)) < 0\,,$$

ceea ce este absurd. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Contradicţia obţinută arată că presupunerea făcută este falsă, astfel că $card(\{a_n|\, n\in\mathbb{N}^*\})\leq 2$. Convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ implică în plus, în cazul în care şirul nu este constant, că el este staţionar începând cu un anumit rang. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

**Problema 4.** Fie $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Definim funcţia $\tilde{f}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x f(t)\,dt & ,\ \text{dacă } x>0,\\ f(0) & ,\ \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Arătaţi că:
a) funcţia $\tilde{f}$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0,1]$;
b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \int_0^1 \left(f(x)-\tilde{f}(x)\right)^2 dx.$$

**Soluţie**.
a) Funcţia $f$ fiind continuă pe $[0,1]$, rezultă că funcţia $F:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă pe $[0,1]$, cu $F'=f$. Rezultă atunci că funcţia $\tilde{f}$ este derivabilă pe $(0,1]$, ca produs de funcţii derivabile.
........................................ **1p**
Rămâne să mai arătăm doar că $\tilde{f}$ este continuă în 0. Cum $f$ este continuă, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, astfel că, aplicând regula lui l'Hôspital, avem:

$$\lim_{x\to 0}\tilde{f}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x'}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\tilde{f}(0)\,,$$

şi rezultă că $\tilde{f}$ este continuă în 0. ........................................ **1p**
b) Fie $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Atunci $\tilde{f}(1)=I$. Ţinând cont de a), funcţia $G:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definită prin $G(x)=x\cdot\left(\tilde{f}(x)-I\right)^2$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0,1]$. În plus avem
$G(0)=0=G(1)$, ........................................ **1p**
respectiv

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \left(\tilde{f}(x)-I\right)^2+2x\cdot\left(\tilde{f}(x)-I\right)\cdot\tilde{f}'(x)=\\
&=\left(\tilde{f}(x)-I\right)\cdot\left(\tilde{f}(x)-I+2x\cdot\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\cdot f(x)\right)\right)=\\
&=\left(\tilde{f}(x)-I\right)\cdot\left(2f(x)-\tilde{f}(x)-I\right)=2f(x)\cdot\left(\tilde{f}(x)-I\right)+I^2-\tilde{f}^2(x)=\\
&=I^2-2If(x)+f^2(x)-\left(f(x)-\tilde{f}(x)\right)^2, \qquad \text{pentru orice } x\in(0,1].
\end{aligned}$$

........................................ **2p**
Deoarece există $\lim\limits_{x\to 0} G'(x)=(I-f(0))^2\in\mathbb{R}$, rezultă că $G$ este derivabilă în 0, cu $G'(0)=(I-f(0))^2$, şi $G'$ este continuă pe $[0,1]$. Obţinem atunci:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f^2(x)\,dx-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2-\int_0^1\left(f(x)-\tilde{f}(x)\right)^2 dx=\\
&=\int_0^1\left(f^2(x)+I^2-2If(x)-\left(f(x)-\tilde{f}(x)\right)^2\right)dx=\\
&=\int_0^1 G'(x)\,dx=G(1)-G(0)=0\,,
\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează relaţia cerută. ........................................ **2p**