Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a V-a

Problema 1. La cercul de robotică al unei școli, elevii lucrează în echipe complete de câte trei băieți și o fată. Într-o zi, au lipsit două fete și un băiat, iar elevii au fost regrupați astfel încât în fiecare echipă nou-formată au fost câte o fată și patru băieți.

Câți elevi sunt înscriși la cercul de robotică al acelei școli?

Problema 2. Se consideră numărul $n = 2^x + 2^y + 2^z + 2^t$, unde x, y, z, t sunt numere naturale distincte. Împărțind numărul n la 305, se obține câtul 2^a și restul 0, unde a este un număr natural.

Determinați restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5.

Gazeta Matematică

Problema 3. Pe ecranul monitorului unui calculator sunt afișate toate numerele naturale de la 1 la 2025. Un virus șterge o parte dintre aceste numere după următorul algoritm:
- la pasul 1 se șterge un număr dintre cele afișate pe ecran și succesorul acestuia;
- la fiecare nou pas, dintre numerele rămase pe ecran după pasul precedent se șterg două numere, astfel încât unul dintre numerele șterse să fie succesorul celuilalt număr șters.

Algoritmul se oprește după 674 de pași.

a) Arătați că suma numerelor rămase pe ecran nu este divizibilă cu 6.

b) Arătați că produsul numerelor rămase pe ecran este divizibil cu 6.

Problema 4. Andrei scrie numărul 2025 ca sumă de 40 de numere naturale nenule, oricare două diferite.

Determinați care este cea mai mică valoare pe care o poate lua cel mai mare dintre cele 40 de numere din sumă.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2025
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. La cercul de robotică al unei școli, elevii lucrează în echipe complete de câte trei băieți și o fată. Într-o zi, au lipsit două fete și un băiat, iar elevii au fost regrupați astfel încât în fiecare echipă nou-formată au fost câte o fată și patru băieți.

Câți elevi sunt înscriși la cercul de robotică al acelei școli?

Soluție. Dacă elevii lucrează în echipe de câte o fată și trei băieți, înseamnă că se pot grupa astfel: (F, B, B, B) (F, B, B, B) (F, B, B, B) ...... (F, B, B, B) **1p**

Când lipsesc două fete și un băiat, două grupe rămân incomplete (mutând un băiat dintr-o grupă în alta dacă băiatul absent nu face parte din aceeași grupă cu una dintre fetele absente):

$(\cancel{F}, \cancel{B}, B, B)$ $(\cancel{F}, B, B, B)$ (F, B, B, B) ...... (F, B, B, B) **1p**

Cum fiecare grupă nouă conține câte o singură fată, cei 2+3 băieți rămași din grupele incomplete trebuie regrupați astfel încât să completeze grupele cu câte 3 băieți și o fată până la patru băieți, așadar câte încă unul în fiecare grupă. **2p**

Deoarece toate grupele nou formate conțin exact câte 4 băieți și o fată, deducem că au fost formate exact 5 astfel de grupe. Așadar, în ziua în care au lipsit cei trei copii, au fost prezenți $5 \cdot 4 = 20$ băieți și 5 fete. **2p**

Așadar, la cercul de robotică sunt înscriși $20 + 1 = 21$ de băieți și $5 + 2 = 7$ fete, în total 28 de elevi. **1p**

Soluție alternativă.

Dacă f este numărul fetelor de la cercul de robotică, numărul băieților este egal cu $3f$. **1p**

Când lipsesc două fete și un băiat, numărul fetelor devine $f - 2$, iar al băieților $3f - 1$. **1p**

Dacă elevii se pot regrupa astfel încât fiecare grupă să conțină o fată și patru băieți, atunci $4 \cdot (f - 2) = 3f - 1$ **2p**

Obținem $4f - 8 = 3f - 1$, de unde $f = 7$ **2p**

În consecință, numărul băieților este $3 \cdot 7 = 21$, deci la cercul de robotică sunt $7 + 21 = 28$ de elevi **1p**

Problema 2. Se consideră numărul $n = 2^x + 2^y + 2^z + 2^t$, unde x, y, z, t sunt numere naturale distincte. Împărțind numărul n la 305, se obține câtul 2^a și restul 0, unde a este un număr natural.

Determinați restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5.

Gazeta Matematică

Soluție. Presupunem, fără a restrânge generalitatea problemei, că $x < y < z < t$.

Atunci $2^x + 2^y + 2^z + 2^t = 305 \cdot 2^a$, de unde $2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x}) = 305 \cdot 2^a$, (1) ... **1p**

Cum $x < y < z < t$, rezultă că $y - x$, $z - x$ și $t - x$ sunt numere naturale nenule, deci 2^{y-x}, 2^{z-x}, 2^{t-x} sunt numere pare, iar $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x}$ este impar. **1p**

Din motive de paritate, din relația (1) deducem că $2^x = 2^a$ și $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 305$, deci $x = a$, iar $2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 304$ **2p**

Obținem $2^{y-x} \cdot (1 + 2^{z-y} + 2^{t-y}) = 2^4 \cdot 19$, de unde $y - x = 4$, deci $y = a + 4$ **1p**

În plus, $1 + 2^{z-y} + 2^{t-y} = 19$, deci $2^{z-y}(1 + 2^{t-z}) = 2 \cdot 9$, de unde reiese că $z - y = 1$ și $t - z = 3$, adică $z = y + 1 = a + 5$ și $t = z + 3 = a + 8$ **1p**

Ca urmare, $a + x + y + z + t = a + a + (a + 4) + (a + 5) + (a + 8) = 5a + 17 = 5 \cdot (a + 3) + 2$, deci restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5 este egal cu 2 .... **1p**

Problema 3. Pe ecranul monitorului unui calculator sunt afișate toate numerele naturale de la 1 la 2025. Un virus șterge o parte dintre aceste numere după următorul algoritm:
- la pasul 1 se șterge un număr dintre cele afișate pe ecran și succesorul acestuia;
- la fiecare nou pas, dintre numerele rămase pe ecran după pasul precedent se șterg două numere, astfel încât unul dintre numerele șterse să fie succesorul celuilalt număr șters.

Algoritmul se oprește după 674 de pași.

a) Arătați că suma numerelor rămase pe ecran nu este divizibilă cu 6.

b) Arătați că produsul numerelor rămase pe ecran este divizibil cu 6.

Soluție. a) La fiecare pas, se șterg câte două numere consecutive, adică un număr par și un număr impar. După 674 de pași, se șterg 674 de numere pare și 674 de numere impare. ... **1p**

Deoarece pe ecran sunt scrise inițial 1012 numere pare și 1013 numere impare, pe ecran rămân 338 de numere pare și 339 de numere impare **1p**

Întrucât suma unui număr impar de numere impare este un număr impar, deducem că suma numerelor rămase pe ecran este un număr impar, care nu poate fi divizibil cu 6 .... **1p**

b) Dintre două numere naturale consecutive, cel mult unul este multiplu de 3, deci la fiecare dintre cei 674 de pași se șterge cel mult un multiplu de 3 .... **1p**

Deoarece printre numerele de la 1 la 2025 se află 675 de multipli de 3, la oprirea algoritmului rămâne pe ecran cel puțin un număr natural divizibil cu 3, adică un număr m de forma $m = 3a$, unde a este număr natural nenul **1p**

Alegând un număr par n, $n = 2b$, unde b este număr natural nenul, dintre cele 338 de numere pare rămase pe ecran, deducem că produsul numerelor rămase pe ecran conține factorul $m \cdot n = 6 \cdot a \cdot b$, deci este divizibil cu 6 .... **2p**

Problema 4. Andrei scrie numărul 2025 ca sumă de 40 de numere naturale nenule, oricare două diferite.

Determinați care este cea mai mică valoare pe care o poate lua cel mai mare dintre cele 40 de numere din sumă.

Soluție. Fie $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{40}$ astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{40} = 2025$.

Atunci $a_2 \geqslant a_1 + 1$, $a_3 \geqslant a_2 + 1$, $a_4 \geqslant a_3 + 1$, ..., $a_{40} \geqslant a_{39} + 1$ **1p**

În consecință, $a_{40} \geqslant a_1 + 39$, $a_{40} \geqslant a_2 + 38$, ..., $a_{40} \geqslant a_{38} + 2$ **2p**

Atunci $40 \cdot a_{40} \geqslant (a_1 + 39) + (a_2 + 38) + \ldots + (a_{37} + 3) + (a_{38} + 2) + (a_{39} + 1) + a_{40}$, deci $40 \cdot a_{40} \geqslant 2025 + (1 + 2 + \ldots + 39) = 2805$, iar cum $a_{40} \in \mathbb{N}$, deducem că $a_{40} \geqslant 71$ **2p**

Întrucât 2025 se poate scrie ca suma a 40 de numere naturale nenule distincte astfel încât cel mai mare dintre ele să fie 71, de exemplu $1 + 29 + 34 + 35 + 36 + \ldots + 70 + 71 = 2025$, rezultă că cea mai mică valoare posibilă a lui a_{40} este 71 .... **2p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a VI-a

Problema 1. Fie numerele naturale a, b, c pentru care numerele $m = \dfrac{5a+6b+7c+6}{4a+3b+2c+3}$ și $n = \dfrac{a+2b+3c+5}{3a+b+2c+5}$ sunt simultan numere naturale.

a) Arătați că $m \geqslant 2$.

b) Determinați numerele m și n.

Problema 2. Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \quad \text{și} \quad \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ și $AB = AC$. Considerăm punctul D pe latura AC și punctele distincte E, F, G pe latura AB astfel încât $BC = BD = DE = EF$, iar $DG = DF$.

a) Arătați că $BF = GE$.

b) Aflați măsura unghiului BCG.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 2$ cu proprietatea că n este divizibil cu fiecare dintre numerele

$$d_1,\ d_1 + d_2,\ \ldots,\ d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1},$$

unde $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$ sunt toți divizorii naturali ai lui n.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a VI-a - soluții

Problema 1. Fie numerele naturale a, b, c pentru care numerele $m = \dfrac{5a+6b+7c+6}{4a+3b+2c+3}$ și $n = \dfrac{a+2b+3c+5}{3a+b+2c+5}$ sunt simultan numere naturale.

a) Arătați că $m \geqslant 2$.

b) Determinați numerele m și n.

Soluție. a) Dacă $m \leqslant 1$, atunci $5a+6b+7c+6 \leqslant 4a+3b+2c+3$, adică $a+3b+5c+3 \leqslant 0$, ceea ce nu se poate. Deci $m \geqslant 2$ **2p**

b) Nu putem avea $n \geqslant 2$, deoarece ar rezulta $a+2b+3c+5 \geqslant 6a+2b+4c+10$, deci $0 \geqslant 5a+c+5$, fals. Cum $n > 0$, obținem $n = 1$ **1p**

Din $n = 1$ obținem $a+2b+3c+5 = 3a+b+2c+5$, deci $b+c = 2a$. **1p**

Dacă, prin absurd, $m \geqslant 3$, ar rezulta $5a+6b+7c+6 \geqslant 12a+9b+6c+9$, de unde $c \geqslant 7a+3b+3$. Adunând b în ambii membri, obținem $b+c \geqslant 7a+4b+3$, adică $2a \geqslant 7a+4b+3$, deci $0 \geqslant 5a+4b+3$, fals. Așadar, $m < 3$, de unde, având în vedere punctul a), obținem $m = 2$ **2p**

Din $m = 2$ rezultă $5a+6b+7c+6 = 8a+6b+4c+6$, adică $c = a$ și cum $b+c = 2a$, deducem $a = b = c$. Așadar, $m = 2$ și $n = 1$, valori care se obțin pentru $a = b = c$. . . **1p**

Problema 2. Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48\cdot(a,b)}{[a,b]} \quad \text{și} \quad \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312\cdot(a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Gazeta Matematică

Soluție. Observăm că $a \geqslant \dfrac{a}{(a,b)} > b$. **1p**

Notăm cu $d = (a,b)$. Atunci $a = dx, b = dy, [a,b] = dxy$ cu $(x,y) = 1, x > y$. Obținem $x = dy + \dfrac{48}{xy}$ și $y = dx - \dfrac{312}{xy}$, (1).

Așadar, $xy \,|\, 48$ și $xy \,|\, 312 \Rightarrow xy \mid (48, 312) = 24$. **2p**

Continuarea 1.

Tot din (1) rezultă $xy(x-dy) = 48$ și $xy(dx-y) = 312 \Rightarrow \dfrac{x-dy}{dx-y} = \dfrac{48}{312} = \dfrac{2}{13} \Rightarrow$ $x(13-2d) = y(13d-2) \Rightarrow 13-2d > 0$. **1p**

Avem de analizat cazurile: I. $d = 1 \Rightarrow 11x = 11y \Rightarrow a = b$, fals, deoarece $a > b$.
II. $d = 2 \Rightarrow 3x = 8y$. Cum $(x, y) = 1$, obținem $x = 8, y = 3$, deci $a = 16, b = 6$ **1p**
III. $d = 3 \Rightarrow 7x = 37y \Rightarrow x = 37, y = 7$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$.
IV. $d = 4 \Rightarrow x = 10y \Rightarrow x = 10, y = 1$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$.
V. $d = 5 \Rightarrow x = 21y \Rightarrow x = 21, y = 1$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$.
VI. $d = 6 \Rightarrow x = 76y \Rightarrow x = 76, y = 1$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$. **2p**

Continuarea 2.
Din $xy \mid 24$ rezultă că $xy \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, de unde rezultă (și se analizează) cazurile $(x, y) \in \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (3, 2), (8, 1), (12, 1), (4, 3), (24, 1), (8, 3)\}$.
Obținem $x = 8, y = 3$, care implică $d = 2$ și soluția unică $a = 16$, $b = 6$ **4p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle BAC = 30°$ și $AB = AC$. Considerăm punctul D pe latura AC și punctele distincte E, F, G pe latura AB astfel încât $BC = BD = DE = EF$, iar $DG = DF$.

a) Arătați că $BF = GE$.

b) Aflați măsura unghiului BCG.

Soluție.

a) $\triangle DFG$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DFG = \sphericalangle DGF \Rightarrow \sphericalangle DFB = \sphericalangle DGE$ (1) **1p**
$\triangle BDE$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DBF = \sphericalangle DEG$ (2) **1p**
Din (1),(2) și $BD = DE$, obținem $\triangle BDF \equiv \triangle EDG$ $(L.U.U.) \Rightarrow BF = GE$ ... **2p**

b) $\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \dfrac{180° - \sphericalangle BAC}{2} = \dfrac{150°}{2} = 75°$ **1p**
$BF = GE \Rightarrow BG = FE = BC \Rightarrow \triangle BCG$ isoscel **1p**
Deci $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BGC = \dfrac{180° - \sphericalangle CBG}{2} = \dfrac{105°}{2} = 52°30'$...................... **1p**

Problema 4. Determinați numerele naturale $n \geqslant 2$ cu proprietatea că n este divizibil cu fiecare dintre numerele

$$d_1,\ d_1 + d_2,\ \ldots,\ d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1},$$

unde $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$ sunt toți divizorii naturali ai lui n.

Soluție. Numerele prime au proprietatea din enunț, deoarece, dacă n este număr prim, divizorii săi sunt $1 = d_1 < d_2 = n$, iar n este divizibil cu d_1 .... **1p**

Fie n un număr compus, având $k \geqslant 3$ divizori, cu proprietatea din enunț.

Presupunând că n este număr impar, toți cei k divizori ai săi sunt numere impare. Din ipoteză, n este divizibil cu $d_1 + d_2$, care este număr par, deci n ar trebui să fie tot număr par, contradicție. Așadar, n este număr par. **2p**

Atunci $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, deci n este divizibil și cu $d_1 + d_2 = 3$, deci $d_3 = 3$. În plus, deducem că $6 \mid n$ **1p**

Deoarece, pentru orice divizor d al lui n, numărul $\frac{n}{d}$ este de asemenea un divizor al lui n, deducem că $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$ și $\frac{n}{2}$ se află printre cei k divizori ai lui n. **1p**

Cum n este divizibil cu $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$, rezultă că $n \geqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} \geqslant \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = n$.

Deducem că singurii divizori ai lui n, mai mici decât n, sunt $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$ și $\frac{n}{2}$, deci $\frac{n}{6} = d_1 = 1$, $\frac{n}{3} = d_2 = 2$ și $\frac{n}{2} = d_3 = 3$, deci $n = 6$ este singurul număr compus cu proprietatea din enunț **2p**

Ministerul Educației și Cercetării
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ pentru care numărul $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}$ este pătratul unui număr prim p, iar $\overline{cd}-\overline{ab}=p+2$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinaţi mulţimea numerelor raţionale r pentru care există numerele naturale nenule a şi b astfel încât $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}=r$.

Problema 3. Considerăm pătratele $ABCD$ şi $BEFG$, astfel încât B se află pe segmentul (AE) şi G se află pe segmentul (BC). Fie H intersecţia dreptelor DF şi EG. Perpendiculara în H pe DF taie dreptele AE şi BC în punctele I, respectiv J. Arătaţi că patrulaterul $DIFJ$ este pătrat.

Problema 4. Considerăm un triunghi ascuţitunghic ABC, cu $AB<AC$ şi punctele D, I, J, K, astfel încât D este mijlocul laturii BC, iar I, J, K sunt picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C ale acestuia. Perpendiculara în A pe dreapta AD intersectează dreptele BJ şi CK în punctele N, respectiv Q, iar paralela prin A la BC intersectează dreptele IJ şi IK în punctele M, respectiv P. Demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VII-a – soluții

Problema 1. Determinați numerele naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ pentru care numărul $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}$ este pătratul unui număr prim p, iar $\overline{cd}-\overline{ab}=p+2$.

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $p^2=\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}<10+10=20$, numărul p poate fi 2 sau 3 ...... **3p**

Dacă $p=2$, atunci $\overline{cd}=\overline{ab}+4$ și $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{ab}+4}=4$, (1). Ecuația (1) are soluția $\overline{ab}=5$, care este și unică (alte numere sunt fie prea mari, fie prea mici), valoare care nu convine ... **2p**

Dacă $p=3$, atunci $\overline{cd}=\overline{ab}+5$ și $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{ab}+5}=9$, (2). Ecuația (2) are soluția $\overline{ab}=20$, care este și unică (același argument ca mai sus) și obținem $\overline{abcd}=2025$ **2p**

Altă soluție. Deoarece $\overline{ab}-4$ și $\overline{cd}$ sunt numere naturale și $\sqrt{\overline{ab}-4}+\sqrt{\overline{cd}}\in\mathbb{N}$, rezultă că există $k,n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\overline{ab}-4=k^2$ și $\overline{cd}=n^2$, deci $k+n=p^2$. (1) **2p**

Cum $\overline{cd}-\overline{ab}=p+2$, scăzând primele două egalități obținem $p+6=n^2-k^2=(n-k)(n+k)$. Folosind (1) deducem că $p+6=(n-k)\cdot p^2$, prin urmare $p\mid(p+6)$, deci $p\in\{2,3\}$ **1p**

Dacă $p=2$, obținem $k+n=4$ și $n-k=2$, deci $k=1$ și $n=3$, așadar $\overline{ab}=5$, fals **2p**

Dacă $p=3$, obținem $k+n=9$ și $n-k=1$, deci $k=4$ și $n=5$, așadar $\overline{ab}=20$ și $\overline{cd}=25$, care verifică ipoteza. Prin urmare, numărul căutat este 2025 .... **2p**

Problema 2. Determinați mulțimea numerelor raționale r pentru care există numerele naturale nenule a și b astfel încât $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}=r$.

Soluție. Pentru $r\in\mathbb{Q}$ și $a,b\in\mathbb{N}^*$ ca în enunț, $r=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$, deci $r\geqslant 0$.......... **2p**

De asemenea, ab trebuie să fie pătratul unui număr natural n. Rezultă $r=\dfrac{a+b-2n}{2}=\dfrac{m}{2}$, unde m este număr întreg, deci r este un număr de forma $\dfrac{m}{2}$, cu $m\in\mathbb{N}$.................... **2p**

Reciproc, pentru $a=b=1$ obținem $r=0$, iar pentru $a=m$ și $b=4m$, cu $m\in\mathbb{N}^*$, obținem $r=\dfrac{5m}{2}-2m=\dfrac{m}{2}$, cu $m\in\mathbb{N}^*$. Astfel, mulțimea cerută conține toate numerele de forma $\dfrac{m}{2}$, cu $m\in\mathbb{N}$... **2p**

Mulțimea cerută este $\left\{\dfrac{m}{2}\,\middle|\,m\in\mathbb{N}\right\}$ **1p**

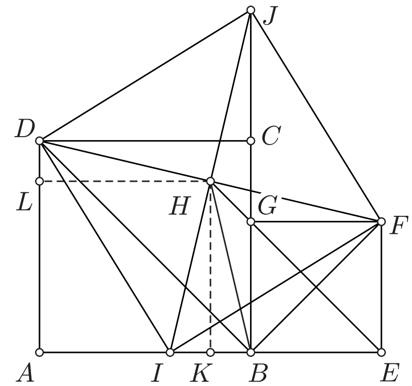
Problema 3. Considerăm pătratele $ABCD$ și $BEFG$, astfel încât B se află pe segmentul (AE) și G se află pe segmentul (BC). Fie H intersecția dreptelor DF și EG. Perpendiculara în H pe DF taie dreptele AE și BC în punctele I, respectiv J. Arătați că patrulaterul $DIFJ$ este pătrat.

Soluție. $\sphericalangle GBF=\sphericalangle DBC=45^\circ$, deci triunghiul DBF este dreptunghic în B. Cum EG este mediatoarea catetei BF a triunghiului BDF, reiese că H este mijlocul ipotenuzei DF . **2p**

Fie K proiecția lui H pe AE. Deoarece H este mijlocul lui DF și $HK\parallel AD$, rezultă că HK este linie mijlocie în trapezul dreptunghic $AEFD$, prin urmare K este mijlocul segmentului AE. Rezultă că $\triangle HAE$ este isoscel, deci $\sphericalangle HAE=\sphericalangle HEA=45^\circ$, adică $H\in AC$ **2p**

Fie L proiecția lui H pe AD. Atunci $\triangle HAK \equiv \triangle HAL$ (I.U.), deci $HK = HL$. Apoi $\sphericalangle KHI + \sphericalangle IHL = 90° = \sphericalangle DHL + \sphericalangle IHL$ implică $\sphericalangle KHI = \sphericalangle LHD$, de unde $\triangle HKI \equiv \triangle HLD$ (C.U.), deci $HI = HD$ **2p**

Avem și $\triangle HAB \equiv \triangle HAD$ (L.U.L.), deci $HB = HD = HI$. Reiese că punctul K este mijlocul segmentului BI, KH este linie mijlocie în $\triangle IBJ$, iar H este mijlocul segmentului IJ. Astfel diagonalele patrulaterului $DIFJ$ sunt egale, se taie în părți egale și sunt perpendiculare, deci $DIFJ$ este pătrat **1p**



Altă soluție. Ca mai sus, H este mijlocul lui DF **2p**

Dreapta IJ este mediatoarea segmentului DF, deci $DI = IF$ **1p**

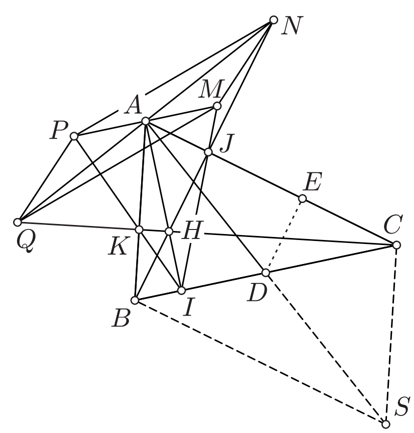
$\sphericalangle IHF = \sphericalangle IEF = 90°$, deci patrulaterul $IEFH$ este inscriptibil, așadar $\sphericalangle IFH = \sphericalangle IEH = 45°$. Cum triunghiul IFD este isoscel, obținem $\sphericalangle IFD = \sphericalangle IDF = 45°$ și $\sphericalangle DIF = 90°$ **2p**

Pentru a arăta că $DIFJ$ este pătrat, rămâne să dovedim că segmentele DF și IJ au același mijloc. Fie K proiecția lui H pe AE. Din $\sphericalangle AID + \sphericalangle EIF = 90°$ obținem $\sphericalangle AID = \sphericalangle EFI$, deci $\triangle AID \equiv \triangle EFI$ (I.U.), așadar $AI = EF = BE$. Astfel, K este mijlocul segmentului IB. Cum $HK \parallel BJ$, deducem că HK este linie mijlocie în triunghiul BIJ, deci H este și mijlocul segmentului IJ **2p**

Problema 4. Considerăm un triunghi ascuțitunghic ABC, cu $AB < AC$ și punctele D, I, J, K, astfel încât D este mijlocul laturii BC, iar I, J, K sunt picioarele înălțimilor din A, B, respectiv C ale acestuia. Perpendiculara în A pe dreapta AD intersectează dreptele BJ și CK în punctele N, respectiv Q, iar paralela prin A la BC intersectează dreptele IJ și IK în punctele M, respectiv P. Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Soluție. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Patrulaterele $BIHK$ și $CIHJ$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle HIK = \sphericalangle HBK = 90° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle JCH = \sphericalangle HIJ$, așadar IA este bisectoarea unghiului JIK. Cum $IA \perp BC$ și $MP \parallel BC$, reiese $IA \perp MP$. Deducem că IA este bisectoare și înălțime în $\triangle IMP$, deci acesta este isoscel și A este mijlocul segmentului MP.......... **3p**

Fie S simetricul lui A față de punctul D. Deoarece D este și mijlocul segmentului BC, rezultă că $ABSC$ este paralelogram. Reiese $BS \parallel AC$ și, cum $BJ \perp AC$, deducem că $BJ \perp BS$. Din $\sphericalangle SBN = \sphericalangle SAN = 90°$ rezultă că patrulaterul $SBAN$ este inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle NSA = \sphericalangle ABN = 90° - \sphericalangle A$. Analog rezultă $\sphericalangle QSA = \sphericalangle ACQ = 90° - \sphericalangle A$, deci $\sphericalangle QSA = \sphericalangle NSA$. Astfel, în triunghiul SNQ, înălțimea SA este și bisectoare, prin urmare A este mijlocul laturii NQ **3p**



Diagonalele patrulaterului $MNPQ$ se înjumătățesc, așadar $MNPQ$ este paralelogram.. **1p**

Alternativă la partea a doua (**3p**). Fie E proiecția lui D pe AC. Avem $\sphericalangle DEA = \sphericalangle AJN = 90°$ și $\sphericalangle DAE = 90° - \sphericalangle NAJ = \sphericalangle ANJ$, deci $\triangle DAE \sim \triangle ANJ$. Rezultă $\dfrac{NA}{AD} = \dfrac{AJ}{DE} = 2\dfrac{AJ}{BJ}$; analog, $\dfrac{QA}{AD} = 2\dfrac{AK}{CK}$. Din $\triangle ABJ \sim \triangle ACK$ (U.U.) rezultă $\dfrac{AJ}{BJ} = \dfrac{AK}{CK}$, de unde $AQ = AN$.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie mulţimile

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ şi } x + y + 1 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ şi } x^3 + y^3 + 1 = 3xy\}.$$

a) Arătaţi că $A \subset B$.
b) Arătaţi că mulţimea $B \setminus A$ are exact un element.

Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17.$$

Gazeta Matematică

Problema 3. Numerele reale strict pozitive x, y, z verifică relaţiile

$$xy + 4 \leqslant 2(x + z), \quad yz + 4 \leqslant 2(y + x), \quad zx + 4 \leqslant 2(z + y).$$

Demonstraţi că $x = y = z$.

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Pe segmentele BC şi DD' luăm punctele M, respectiv N, astfel încât $BM = DN$. Arătaţi că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie mulțimile

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x + y + 1 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x^3 + y^3 + 1 = 3xy\}.$$

a) Arătați că $A \subset B$.
b) Arătați că mulțimea $B \setminus A$ are exact un element.

Soluție. a) Dacă $(x, y) \in A$, atunci $y = -x - 1$ ... **2p**

Reiese $x^3 + y^3 + 1 = x^3 - (x + 1)^3 + 1 = 3x(-x - 1) = 3xy$, deci $(x, y) \in B$ ... **2p**

b) Dacă $(x, y) \in B$, atunci $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$, deci $(x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xy + 1 = 0$, sau $(x+y+1)((x+y)^2-(x+y)+1)-3xy(x+y+1) = 0$, sau $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1) = 0$.

Pentru ca $(x, y) \in B \setminus A$ trebuie ca $x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$, de unde $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$, adică $x = y = 1$. Cum $(1, 1) \notin A$, reiese $B \setminus A = \{(1, 1)\}$ ... **3p**

Variantă pentru b). Observăm că $(1, 1) \in B \setminus A$ ... **1p**

Fie $(x, y) \in B$, $x = 1 + a$, $y = 1 + b$. Atunci $a^3 + b^3 + 3a^2 + 3b^2 - 3ab = 0$, sau $(a + b)(a^2 - ab + b^2) - 3(a^2 - ab + b^2) = 0$, deci $(a + b - 3)(a^2 - ab + b^2) = 0$. Dacă $a + b - 3 = 0$, atunci $x + y + 1 = 0$ și $(x, y) \in A$. Dacă $a^2 - ab + b^2 = 0$, atunci $a = b = 0$ și $(x, y) \in B \setminus A$. Astfel $B \setminus A$ conține doar elementul $(1, 1)$ ... **2p**

Altă soluție. Se știe că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Reiese $x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$ ... **4p**

Astfel, dacă $(x, y) \in A$, atunci $(x, y) \in B$ ... **1p**

Apoi, dacă $(x, y) \in B \setminus A$, atunci $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 0$ și finalizăm ca la prima soluție **2p**

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17$.

Gazeta Matematică

Soluție. Ecuația se scrie $(x - y)^2 + 2xy + xy(x - y) = 17$ ... **2p**

Notăm $x - y = d \in \mathbb{Z}$, $xy = p \in \mathbb{N}$. Atunci egalitatea devine $p(d + 2) = 17 - d^2$, de unde $p = \dfrac{17 - d^2}{d + 2}$ ... **2p**

Obținem $p = \dfrac{13}{d + 2} + 2 - d \in \mathbb{N}$. Rezultă $d + 2 \in \{1, -1, 13, -13\}$, adică $d \in \{-1, -3, 11, -15\}$. Dacă $d = -1$, atunci $p = 16$, caz în care nu avem soluții, deoarece nu există două numere naturale cu produsul 16 și diferența -1. Din $d = -3$ rezultă $p = -8 < 0$, care nu convine. Pentru $d = 11$, $p = -8 < 0$, nu convine. Dacă $d = x - y = -15$, atunci $p = xy = 16$, de unde obținem soluția (unică) $x = 1$, $y = 16$ ... **3p**

Altă soluție. Ecuația se scrie $(x-y)^2+2xy+xy(x-y)=17$ **2p**

Formăm o diferență de pătrate: $4(x-y)^2+4xy(x-y)+(xy)^2-(xy)^2+8xy-16=68-16$, adică $(2(x-y)+xy)^2-(xy-4)^2=52$. Reiese $(2x-2y+xy-xy+4)(2x-2y+xy+xy-4)=52$, de unde $(x-y+2)(x-y+xy-2)=13$ **2p**

Cum numerele x, y, z sunt naturale, sunt posibile cazurile

• $x-y+2=-13$ și $x-y+xy-2=-1$, deci $x-y=-15$, iar $xy=16$, de unde $y=x+15$ și $x(x+15)=16$. Cum x este natural, deducem că $x=1$, apoi $y=16$;

• $x-y+2=-1$ și $x-y+xy-2=-13$, deci $x-y=-3$, iar $xy=-8$, imposibil dacă x și y sunt naturale;

• $x-y+2=1$ și $x-y+xy-2=13$, deci $x-y=-1$ și $xy=16$, imposibil dacă x și y sunt naturale;

• $x-y+2=13$ și $x-y+xy-2=1$, deci $x-y=11$, iar $xy=-8$, imposibil dacă x și y sunt naturale **3p**

Problema 3. Numerele reale strict pozitive x, y, z verifică relațiile $xy+4 \leqslant 2(x+z)$, $yz+4 \leqslant 2(y+x)$, $zx+4 \leqslant 2(z+y)$. Demonstrați că $x=y=z$.

Soluție. Ipoteza este $x(y-2) \leqslant 2(z-2)$, $y(z-2) \leqslant 2(x-2)$, $z(x-2) \leqslant 2(y-2)$ **2p**

Dacă $x-2<0$, folosind relația a doua rezultă $z-2<0$, apoi din prima obținem $y-2<0$, deci $x, y, z \in (0,2)$ și $xyz<8$. Avem $x(2-y) \geqslant 2(2-z)>0$, $y(2-z) \geqslant 2(2-x)>0$, $z(2-x) \geqslant 2(2-y)>0$. Înmulțind inegalitățile membru cu membru și împărțind la $(2-x)(2-y)(2-z)>0$, rezultă $xyz \geqslant 8$, contradicție cu $xyz<8$ **2p**

Analog obținem că dacă $x>2$, atunci $y>2$ și $z>2$, deci $xyz>8$. Înmulțind relațiile ajungem apoi la $xyz \leqslant 8$ – contradicție **2p**

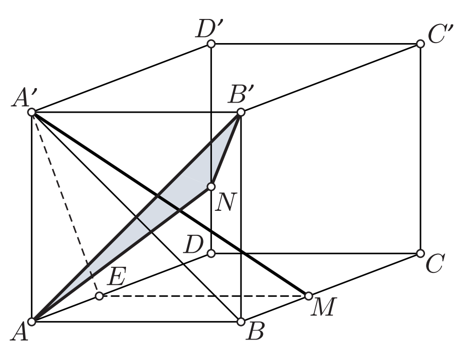
Așadar $x=2$. Înlocuind în condițiile date obținem $y \leqslant z \leqslant 2 \leqslant y$, deci $x=y=z=2$... **1p**

Altă soluție. Avem $ab+4-2(a+b)=(a-2)(b-2)$, (1) **2p**

Presupunem că unul dintre numere este mai mic decât 2, de exemplu $x<2$. Atunci $yz+4 \leqslant 2(y+x)<2y+4$, deci $z<2$. Reiese $xy+4 \leqslant 2(x+z)<2x+4$, deci $y<2$. Din (1) obținem $xy+4>2(x+y)$ și analoagele, deci $\sum xy+12>4\sum x$, în contradicție cu ipoteza **3p**

Așadar $x, y, z \geqslant 2$. Din (1) reiese $xy+4 \geqslant 2(x+y)$ și analoagele. Prin adunare obținem $\sum xy+12 \geqslant 4\sum x$. Coroborând aceasta cu ipoteza deducem că toate inegalitățile trebuie să fie egalități, deci $x=y=z=2$ **2p**

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Pe segmentele BC și DD' luăm punctele M, respectiv N, astfel încât $BM=DN$. Arătați că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.



Soluție. Din $BC \perp (ABB')$ și $AB' \subset (ABB')$ obținem $AB' \perp BC$. Cum $AB' \perp A'B$ (diagonale ale pătratului $ABB'A'$), reiese $AB' \perp (A'BC)$. Deoarece $A'M \subset (A'BC)$, obținem $A'M \perp AB'$, (1) **3p**

Fie $E \in (AD)$ astfel ca $AE=BM$. Atunci $ABME$ este dreptunghi, deci $AB \parallel ME$. Cum $AB \perp (ADA')$ și $AN \subset (ADA')$, rezultă $AN \perp ME$, (2) **2p**

Din $\triangle A'AE \equiv \triangle ADN$ (C.C.) obținem $\sphericalangle DAN = \sphericalangle AA'E$, de unde $\sphericalangle AA'E + \sphericalangle A'AN = \sphericalangle DAN + \sphericalangle A'AN = 90°$. Astfel, $AN \perp A'E$. Folosind (2) obținem $AN \perp (A'EM)$, de unde $AN \perp A'M$. Aceasta, împreună cu (1), duce la $A'M \perp (AB'N)$ **2p**