

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a IX –a – secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

a) Demonstrați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. Când are loc egalitatea?

b) Demonstrați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

c) Determinați natura unui triunghi cu laturile de lungime a, b, c știind că

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Subiectul 2

O mulțime $A \subset \mathbb{N}^*$ cu n elemente este *perfectă* dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului de elemente.

a) Determinați mulțimile *perfecte* cu trei elemente.

b) Arătați că orice mulțime *perfectă* conține cel puțin un număr impar.

c) Dacă mulțimea A este *perfectă* și are n elemente, toate numere naturale consecutive, arătați că n este impar.

Subiectul 3

Fie $E(k) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{k}]$, $k \in \mathbb{N}^*$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

a) Calculați $E(50)$.

b) Determinați cel mai mic număr natural k pentru care $E(k) \geq 500$.

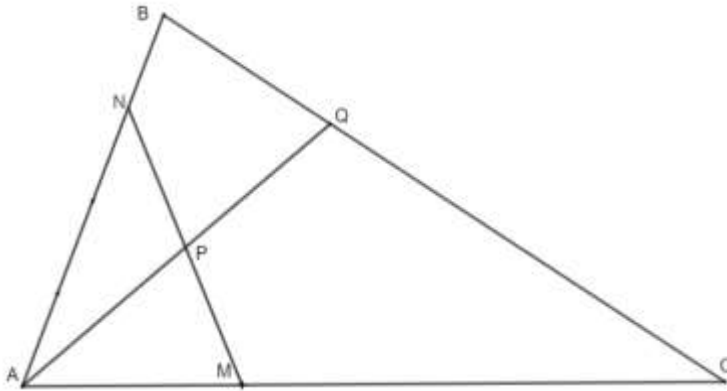
c) Rezolvați ecuația $E(n^2) = m$, unde numerele m și n sunt numere naturale prime între ele.

Subiectul 4

În figura următoare este prezentată schematic o rețea de drumuri, în linie dreaptă, între localitățile indicate în figură: A, B, C, M, N, P și Q . Localitatea M este situată pe drumul AC astfel încât $AM = 40 \text{ km}$, $MC = 80 \text{ km}$. Localitatea N este situată pe drumul AB astfel încât

$\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0}$. Localitatea P este situată pe drumul MN la egală distanță de localitățile M și

N . Localitatea Q este pe drumul BC , $BC = 260 \text{ km}$, astfel încât punctele A, P, Q sunt coliniare și $CQ = k \cdot QB, k > 0$.



a) Arătați că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.

b) Exprimați vectorul \overrightarrow{AQ} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} și de constanta k .

c) Determinați constanta k și lungimea segmentului CQ .

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a X –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotație completă în jurul stelei sale într-un an de 360 de zile. Temperatura medie a apei de pe planetă în cea de-a n -a zi a anului, exprimată în grade Celsius, este dată de formula $T(n) = \frac{100}{3} + \frac{200 \cdot \sin(n^\circ)}{3}$, unde $n \in \{1, 2, 3, \dots, 360\}$.

- În câte zile ale unui an este planeta înghețată, știind că apa îngheață la $0^\circ C$?
- Care este temperatura medie maximă a apei de pe acea planetă de-a lungul unui an?

Subiectul 2

a) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + n + 15} \in \mathbb{Q}\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 \leq \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

Subiectul 3

a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$, $\forall x, y, z \in (0, +\infty)$.

b) Fie a, b și c trei numere complexe nenule având același modul. Arătați că $a + b + c = 0$ dacă și numai dacă $ab + bc + ca = 0$.

Subiectul 4

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \log_7(6^x + 1)$.

a) Arătați că funcția f este inversabilă și determinați inversa sa.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1)$.

Gazeta Matematică 12/2024 (Supliment)

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a XI –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

Două funcții $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se numesc *prietene* dacă există și este finită limita,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$.

a) Arătați că funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}$ și $g(x) = -2x$ sunt *prietene*.

b) Determinați numerele reale a, b cu $a > 0$ astfel încât funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 4}$ și $g(x) = -2x + b$ să fie *prietene*.

c) Dați un exemplu de trei funcții $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile f și h respectiv g și h să fie *prietene*, dar f și g să nu fie *prietene*.

Subiectul 2

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] - 1 & , x < 0 \\ e^x - \cos x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$, unde $\left[\frac{1}{x} \right]$ este partea

întreagă a lui $\frac{1}{x}$. Arătați că:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$;

b) Funcția f nu are proprietate a lui Darboux pe \mathbb{R} ;

c) Ecuația $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ are o infinitate de soluții, cel puțin una pozitivă.

Subiectul 3

O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește *interesantă* dacă are suma elementelor de pe

diagonala principală egală cu zero. Considerăm matricele $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

$M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

a) Fie A o matrice *interesantă*. Arătați că există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât toate elementele de pe diagonala principală a matricei $A - SM(a, b)S^{-1}$ să fie egale cu zero.

b) Arătați că orice matrice *interesantă* poate fi scrisă ca suma a trei matrice nilpotente. (O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^n = O_3$).



c) Dați un exemplu de trei matrice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care să verifice $X + Y + Z = B$ și $X^3 =$

$$Y^3 = Z^3 \text{ unde } B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}.$$

Subiectul 4

Ana vrea să planteze, în grădina sa, trei copaci. Considerăm că suprafața grădinii este raportată la reperul cartezian xOy , unitatea de măsură, pe axele reperului, fiind egală cu 1m. Un peisagist i-a sugerat să planteze primul copac în punctul $A(3,0)$; al doilea copac să-l planteze pe dreapta (d) de ecuație $4x - y - 12 = 0$, la o distanță egală cu $\sqrt{17}$ m față de primul copac; iar ultimul copac să-l planteze pe parabola p de ecuație $y = x^2$.

Ana își dorește ca aria suprafeței triunghiulare determinată de cei trei copaci să fie minimă.

- Ajut-o pe Ana să determine pozițiile celor trei copaci.
- Scrieți ecuația dreptei pe care sunt situați al doilea și al treilea copac.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XII –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

Fie $G_k = (-k, k)$, $k > 0$ și operația $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x, y \in G_k$.

a) Să se demonstreze că G_k este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „*”.

b) Demonstrați că legea „*” este asociativă.

c) Știind că $(G_k, *)$ este grup abelian, să se demonstreze că funcția $f : G_1 \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

d) Determinați numărul natural n pentru care avem, în grupul abelian $(G_1, *)$, ecuația:

$$\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519}.$$

Subiectul 2

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1, I_2 .

b) Arătați că $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025}$ este număr irațional.

c) Comparați I_n și I_{n+2} și calculați $[2000 \cdot I_{50}]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Subiectul 3

Fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Calculați A_1 .

b) Calculați $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln x dx$ și $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx$.

c) Arătați că: $(2n+1) \cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

Maria scrie pe tablă numerele 1, 2, 3, ... , 2025. La fiecare pas, ea alege două numere oarecare x și y din șirul scris pe tablă și le înlocuiește cu $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$, continuând procedeul până când pe tablă

rămâne un singur număr scris.

- Dacă Maria șterge la primul pas numerele 2 și 3, aflați ce număr scrie în locul lor.
- Arătați că dacă Maria șterge de pe tablă numerele a și b și scrie în locul lor numărul c , atunci are loc egalitatea: $\frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)$.
- Dacă la un anumit moment, numerele existente pe tablă sunt x_1, x_2, \dots, x_n cu $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$, arătați că expresia $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$ este invariantă (nu se modifică atunci când ștergem, de exemplu numerele x_1, x_2 și scriem în locul acestora numărul $x_1 * x_2$).
- Aflați numărul rămas pe tablă după 2024 de pași.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a IX-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

- a) Demonstrați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. Când are loc egalitatea?
- b) Demonstrați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.
- c) Determinați natura unui triunghi cu laturile de lungime a, b, c știind că $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Soluție:

- a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x+y)^2 \geq 4x \cdot y$ sau $(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in (0, +\infty)$ 2p

Egalitatea are loc pentru $x = y$ 1p

- b) Conform a) avem $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{2p-a-b} = \frac{4}{c}$ și analoge1p

De unde prin însumare $\Rightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ 1p

Egalitatea are loc pentru triunghi echilateral.

- c) $\frac{1}{b+c-a} = \frac{1}{a+b+c-2a} = \frac{1}{2p-2a}$ și analoge1p

Condiția devine $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$ conform a) și b) obținem $p-a = p-b = p-c$ deci

triunghiul este echilateral1p

Subiectul 2

O mulțime $A \subset \mathbb{N}^*$ cu n elemente este perfectă dacă suma elementelor sale, este egală cu pătratul numărului de elemente.

- a) Determinați mulțimile perfecte cu trei elemente.
b) Arătați că orice mulțime perfectă conține cel puțin un număr impar.
c) Dacă mulțimea A este perfectă și are n elemente, numere naturale consecutive, arătați că n este impar.

Soluție:

$A = \{a, b, c\}, a, b, c \in \mathbb{N}^*, a, b, c$ distincte și $a + b + c = 9$ 1p

Găsim mulțimile $\{1,2,6\}, \{1,3,5\}$ și $\{2,3,4\}$ 2p

- b) Presupunem prin reducere la absurd că există o mulțime $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ cu n elemente numere pare distincte nenule și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$ 1p
 $n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n$, fals. Presupunerea făcută este falsă, deci orice mulțime *perfectă* conține cel puțin un număr impar.1p
- c) $A = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + (n - 1)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$ 1p
 $n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = na + \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 2n = 2a + n - 1 \Rightarrow n = 2a - 1 \Rightarrow n$ este număr impar1p

Subiectul 3

Fie $E(k) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{k}]$, $k \in \mathbb{N}^*$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- Calculați $E(50)$.
- Determinați cel mai mic număr natural k pentru care $E(k) \geq 500$.
- Rezolvați ecuația $E(n^2) = m$, unde numerele m și n sunt numere naturale prime între ele.

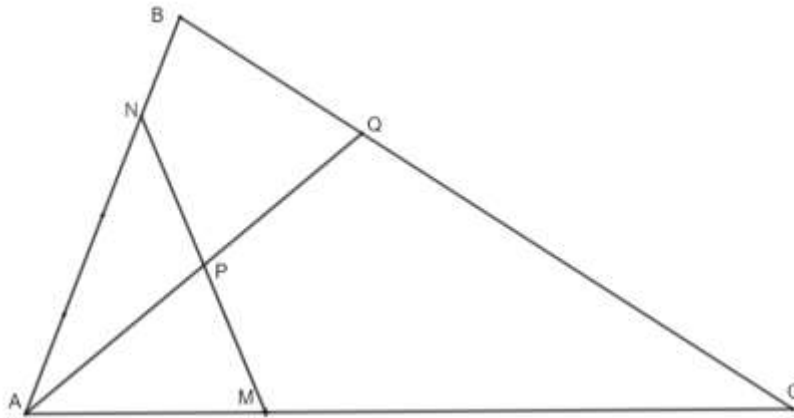
Soluție:

- a) $E(50) = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{8}]) + \dots + ([\sqrt{36}] + [\sqrt{37}] + \dots + [\sqrt{48}]) + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$ 2p
 $E(50) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 7 = 217$ 1p
- b) $E(n^2 - 1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n - 1)(2n - 1)$ 1p
 $E(9^2 - 1) = 444$. Cum $500 - 444 = 56$, iar $56 : 9 = 6, (2)$ trebuie adunați șapte termeni, în sumă. Obținem $E(87) = 507$, deci $k_{\min} = 87$1p
- c) $E(n^2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n - 1)(2n - 1) + n = n + 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + \dots + n) + n = 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$ 1p
 Obținem $4n^3 - 3n^2 + 5n = 6m$. Rezultă $6m : n$ și cum numerele m și n sunt numere naturale prime între ele, avem $6 : n$. Găsim soluțiile $(m, n) \in \{(1,1), (5,2), (16,3), (131,6)\}$1p

Subiectul 4

În figura următoare este prezentată schematic o rețea de drumuri, în linie dreaptă, între localitățile indicate în figură: A, B, C, M, N, P și Q . Localitatea M este situată pe drumul AC astfel încât $AM = 40 \text{ km}$, $MC = 80 \text{ km}$. Localitatea N este situată pe drumul AB astfel încât $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0}$. Localitatea P este situată pe drumul MN la egală distanță de localitățile M și N . Localitatea Q este pe drumul BC , $BC = 260 \text{ km}$ astfel încât punctele A, P, Q sunt coliniare și $CQ = k \cdot QB, k > 0$.

- Arătați că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{8} \overrightarrow{AB}$.
- Exprimați vectorul \overrightarrow{AQ} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} și de constanta k .
- Determinați constanta k și lungimea segmentului CQ .



Soluție:

a) $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 1p

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ 1p

b) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ 2p

c) $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ sunt vectori coliniari, rezultă că $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AQ}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{k+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{ak}{k+1} = \frac{3}{8} \Rightarrow k = \frac{9}{4}$ 1p

$\frac{CQ}{QB} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{CQ}{BC} = \frac{9}{13} \Rightarrow CQ = 180 \text{ km}$1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a X –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotație completă în jurul stelei sale într-un an de 360 de zile. Temperatura medie a apei de pe planetă în cea de-a n-a zi a anului, exprimată în grade Celsius, este dată de formula

$$T(n) = \frac{100}{3} + \frac{200 \cdot \sin(n^\circ)}{3}, \text{ unde } n \in \{1, 2, 3, \dots, 360\}.$$

- a) În câte zile ale unui an este planeta înghețată, știind că apa îngheață la $0^\circ C$?
b) Care este temperatura medie maximă a apei de pe planeta de-a lungul unui an?

Soluție:

a) Condiția $\frac{100}{3} + \frac{200 \cdot \sin(n^\circ)}{3} \leq 0$ revine la $\sin(n^\circ) \leq -\frac{1}{2}$ 1p

$n \in \{210, 211, \dots, 330\}$, deci apa este înghețată timp de 121 de zile 3p

b) $T(n)$ este maximă atunci când $\sin(n^\circ) = 1$. Pentru $n = 90$ obținem $T_{\max} = \frac{100}{3} + \frac{200}{3} = 100^\circ C$... 3p

Subiectul 2

a) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + n + 15} \in \mathbb{Q}\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 \leq \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

Soluție:

a) $\sqrt{n^2 + n + 15} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă numărul $n^2 + n + 15$ este un pătrat perfect 1p

Observăm că $n^2 < n^2 + n + 15 < (n + 4)^2, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Rezolvând în numere naturale ecuațiile $n^2 + n + 15 = (n + 1)^2$, $n^2 + n + 15 = (n + 2)^2$ și $n^2 + n + 15 = (n + 3)^2$, obținem singura soluție convenabilă $n = 14$, prin urmare $A = \{14\}$ 1p

b) Din condițiile de existență ale logaritmulor rezultă că $x \in (0, +\infty) \setminus \{2, 4\}$ 1p

Inecuația din enunț se scrie sub forma $\frac{3}{\log_2 x - 1} + \frac{3}{\log_2 x - 2} \leq \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 2}$ 1p

Cu notația $\log_2 x = t$, avem de rezolvat inecuația $\frac{3}{t - 1} + \frac{3}{t - 2} \leq \frac{2t}{t - 2}$. Obținem $t \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$,

prin urmare $x \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$ 2p

Subiectul 3

a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$, $\forall x, y, z \in (0, +\infty)$.

b) Fie a, b și c trei numere complexe nenule având același modul. Arătați că $a + b + c = 0$ dacă și numai dacă $ab + bc + ca = 0$.

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$, 1p

care se rescrie succesiv $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{yz}} + \frac{2}{\sqrt{zx}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$,

fapt evident adevărat 2p

b) Notăm cu r modulul numerelor a, b și c . Avem: $a + b + c = 0 \Leftrightarrow \overline{a + b + c} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \Leftrightarrow \dots$ 1p

$\Leftrightarrow 0 = \frac{a \cdot \bar{a}}{a} + \frac{b \cdot \bar{b}}{b} + \frac{c \cdot \bar{c}}{c} = \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} \Leftrightarrow 0 = \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} = r^2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ 2p

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$ 1p

Subiectul 4

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \log_7(6^x + 1)$.

a) Arătați că funcția este inversabilă și determinați inversa sa.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1)$.

Gazeta Matematică 12/2024 (Supliment)

Soluție:

a) Demonstrarea bijectivității 2p

$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_6(7^x - 1)$ 1p

b) Fie x număr real astfel încât $f(x) = f^{-1}(x)$. Ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$ implică, conform domeniului de definiție al funcției f^{-1} , că $x > 0$. Observăm că funcțiile f și f^{-1} sunt funcții strict crescătoare.

Fie $y = f(x)$. Vom demonstra că $y = x$. Să presupunem că $y < x$. Atunci $f(x) < x$. Cum f^{-1} este o funcție strict crescătoare, atunci $f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x)$, adică $x < f^{-1}(x)$. Însă $f^{-1}(x) = f(x)$, ceea ce implică $x < f(x)$, adică $x < y$ ceea ce este fals. Prin raționament similar, relația $x < y$ implică $y < x$, ceea ce este fals. Prin urmare, unica posibilitate este $y = x$ 2p

Rămâne să rezolvăm ecuația $\log_7(6^x + 1) = x$. Aceasta revine la $7^x = 6^x + 1$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$. Cum

funcția $g: (0; +\infty)$, $g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă, iar $g(1) = 1$, rezultă că $x = 1$ este unica soluție a ecuației din enunț. 2p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a XI –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Două funcții $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se numesc prietene dacă există și este finită limita, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$.

a) Arătați că funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}$ și $g(x) = -2x$ sunt prietene.

b) Determinați numerele reale a, b cu $a > 0$ astfel încât funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 4}$ și $g(x) = -2x + b$ să fie prietene.

c) Dați un exemplu de trei funcții $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile f și h respectiv g și h să fie prietene, dar f și g să nu fie prietene.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 3x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 - 3x^2)^2 + 2x^3 \sqrt{8x^3 - 3x^2} + 4x^2}} \right) \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = -\frac{1}{4} \Rightarrow f, g - \text{prietene} \dots\dots\dots 1p$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + x + 4} - 2x + b) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{a + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} - 2 + \frac{b}{x} \right) = \infty \cdot (\sqrt{a} - 2) = \begin{cases} -\infty, \sqrt{a} - 2 < 0 \\ \infty, \sqrt{a} - 2 > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$

Cum limita este finită, atunci $\sqrt{a} - 2 = 0 \Rightarrow a = 4 \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x + 4} - 2x + b) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{\sqrt{4x^2+x+4}+2x} + b \right) = \frac{1}{4} + b = \text{finită}$

Finalizare, $a = 4, b \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

c) Putem considera $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}, g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 4}$ și $h(x) = -2x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + h(x)) = -\frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) + h(x)) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty \dots\dots\dots 2p$

Subiectul 2

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] - 1, & x < 0 \\ e^x - \cos x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $\left[\frac{1}{x} \right]$ este partea întreagă a lui $\frac{1}{x}$. Arătați că:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$;

b) Funcția f nu are proprietate a lui Darboux pe \mathbb{R} ;

c) Ecuația $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ are o infinitate de soluții, cel puțin una pozitivă.

Soluție:

a) $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Pentru $x < 0 \Rightarrow 1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x$, astfel $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \dots\dots\dots 1p$

Pentru $x > 0 \Rightarrow 1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$, astfel $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \dots\dots\dots 1p$

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \dots\dots\dots 1p$

b) $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -1$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța întâi 1p

Prin urmare, f nu are proprietatea lui Darboux 1p

c) Pentru $x < 0, f(x) = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x}$, de aici $\frac{1}{x} = n \in \mathbb{Z}, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}, n < 0$ sunt soluții 1p

Pentru $x \geq 0, f(x) = 0 \Rightarrow e^x - \cos x - 1 = 0$. Considerăm $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = e^x - \cos x - 1$ pentru orice $x \geq 0$. Atunci g este continuă, iar ecuația $f(x) = 0$ pentru $x \geq 0$ devine $g(x) = 0$ pentru $x \geq 0$.

Observăm că $g(0) = e^0 - \cos 0 - 1 = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$. Mai mult, avem $g(1) = e^1 - \cos 1 - 1$. Cum $\cos 1 < 1 \Rightarrow 1 + \cos 1 < 1 + 1 < e$, de unde obținem că $e - \cos 1 - 1 > 0$, adică $g(1) > 0$.

Prin urmare, există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $g(x_0) = 0$. Astfel ecuația $f(x) = 0, x > 0$ are cel puțin o soluție pozitivă 1p

Subiectul 3

O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește interesantă dacă are suma elementelor de pe diagonala principală egală cu zero.

Considerăm matricele $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$.

a) Fie A o matrice interesantă. Arătați că există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât toate elementele de pe diagonala principală a matricei $A - SM(a, b)S^{-1}$ să fie egale cu zero.

b) Arătați că orice matrice interesantă poate fi scrisă ca suma a trei matrice nilpotente. (O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^n = O_3$).

c) Dați un exemplu de trei matrice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care să verifice $X + Y + Z = B$ și $X^3 = Y^3 = Z^3$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

a) $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

$$A - SM(a, b)S^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} - b & a_{12} + b & a_{13} - b \\ a_{21} - b & a_{22} - a + b & a_{23} + a - b \\ a_{31} & a_{32} - a & a_{33} + a \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$a_{11} - b = 0, a_{22} - a + b = 0, a_{33} + a = 0$, deci $a_{11} = b, a_{33} = -a$ (se verifică $a_{22} - a + b = 0$) 1p

b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, M(a, b) = M(-a_{33}, a_{11}) = M \dots\dots\dots 1p$

Conform a) $A - SM(a, b)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}$ deci alegem $X = SMS^{-1}, X^3 = SM^3S^{-1} = O_3$

$Y = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^3 = O_3, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}, Z^3 = O_3$ și atunci $A = X + Y + Z; X, Y, Z$ nilpotente..... 1p

c) Folosim b) $X = SM(2025, 2025)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2025 & -2025 & 2025 \\ 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 2025 & -2025 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2025 & -2025 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2025 & 0 & 0 \\ 0 & -2025 & 0 \end{pmatrix}$, $B = X + Y + Z$ și $X^3 = Y^3 = Z^3 = O_3$ 2p

Subiectul 4

Ana vrea să planteze, în grădina sa, trei copaci. Considerăm că suprafața grădinii este raportată la reperul cartezian xOy , unitatea de măsură, pe axele reperului, fiind egală cu 1m. Un peisagist i-a sugerat să planteze primul copac în punctul $A(3,0)$; al doilea copac să-l planteze pe dreapta (d) de ecuație $4x - y - 12 = 0$, la o distanță egală cu $\sqrt{17}$ m față de primul copac; iar ultimul copac să-l planteze pe parabola p de ecuație $y = x^2$.

Ana își dorește ca aria suprafeței triunghiulare determinată de cei trei copaci să fie minimă.

a) Ajut-o pe Ana să determine pozițiile celor trei copaci.

b) Scrieți ecuația dreptei pe care sunt situați al doilea și al treilea copac.

Soluție

a) $B \in d$ și $AB = \sqrt{17} \Rightarrow (x - 3)^2 + (4x - 12)^2 = 17 \Rightarrow B_1(4,4)$ sau $B_2(2, -4)$ 2p

$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ 1p

Pentru $B = B_1(4, 4)$, $C(x, x^2)$, $\Delta = x^2 - 4x + 12$, $A_{ABC} = \frac{1}{2}((x - 2)^2 + 8) =$ minimă pentru $x = 2$

$\Rightarrow C(2, 4)$ 2p

Pentru $B = B_2(2, -4)$, $C(x, x^2)$, $\Delta = -x^2 + 4x - 12$, $A_{ABC} = \frac{1}{2}((x - 2)^2 + 8) =$ minimă pentru $x = 2$

Deci $C(2, 4)$. Prin urmare, ambele poziții pentru punctul B pot fi alese. 1p

b) $B = B_1(4, 4)$, $C(2, 4)$ ecuația dreptei BC este $y = 4$ sau $B = B_2(2, -4)$, $C(2, 4)$ ecuația dreptei BC este

$x = 2$ 1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a XII –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Fie $G_k = (-k, k)$, $k > 0$ și operația $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x, y \in G_k$.

- Să se demonstreze că G_k este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „*”.
- Demonstrați că legea „*” este asociativă.
- Știind că $(G_k, *)$ este grup abelian, să se demonstreze că funcția $f: G_1 \rightarrow (0, +\infty)$,
 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.
- Determinați numărul natural n pentru care avem, în grupul abelian $(G_1, *)$ ecuația:

$$\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519}.$$

Soluție

a) $\forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow |x| < k, |y| < k \Rightarrow |xy| < k^2 \Rightarrow xy \in (-k^2, k^2) \Rightarrow k^2 + xy > 0$**1p**

Demonstrează că $-k(k^2 + xy) < k^2(x + y) < k(k^2 + xy)$, $\forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow$

$-k < \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} < k, \forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow x * y \in (-k, k)$, prin urmare G_k este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „*”.....**1p**

b) Demonstrează asociativitatea.....**1p**

c) Demonstrează f morfism.....**1p**

Demonstrează f bijectivă..... **1p**

d) Numerele reale $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{31}, \dots, \frac{1}{2n^2-1}$ sunt elemente ale mulțimii G_1 și din punctul *c*) știm că

$f: G_1 \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

Notăm $N = \frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1}$. Se demonstrează folosind metoda inducției matematice că

$f(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $\forall x_i \in G_1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$f(N) = f\left(\frac{1}{7}\right) \cdot f\left(\frac{1}{17}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n^2-1}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}; f\left(\frac{506}{1519}\right) = \frac{1013}{2025}$$

$$\stackrel{f=inj}{\Rightarrow} \frac{n+1}{2n} = \frac{1013}{2025} \Rightarrow n = 2025$$
.....**2p**

Subiectul 2:

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculați I_1, I_2 .
- Arătați că $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025}$ este număr irațional.
- Comparați I_n și I_{n+2} și calculați $[2000 \cdot I_{50}]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$; $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \dots\dots\dots 2p$

b) $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025} = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^2 + x^4}{x^2 + 1} dx + \dots + \int_0^1 \frac{x^{2022} + x^{2024}}{x^2 + 1} dx$
 $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^6 dx + \dots + \int_0^1 x^{2022} dx$

$I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2023} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \dots\dots\dots 2p$

c) $\frac{x^{n-1}}{x^2+1} \geq \frac{x^{n+1}}{x^2+1}, \forall x \in [0,1]$, funcțiile $\frac{x^{n-1}}{x^2+1}$ și $\frac{x^{n+1}}{x^2+1}$ sunt continue și integrabile pe intervalul $[0; 1] \Rightarrow$

$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+2} \dots\dots\dots 1p$

$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n-1} + x^{n+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-2)} \dots\dots\dots 1p$

$n = 50 \Rightarrow \frac{1}{100} \leq I_{50} \leq \frac{1}{96} \Rightarrow 20 \leq 2000 \cdot I_{50} \leq \frac{2000}{96} < 21 \Rightarrow [2000 \cdot I_{50}] = 20 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 3:

Fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \dots \cdot (x + 2n), n \in \mathbb{N}^*$ și $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Calculați A_1 .

b) Calculați $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln(x) dx$ și $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx$.

c) Arătați că: $(2n + 1) \cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $A_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (x + 1)(x + 2) dx = \int_0^1 (x^2 + 3x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{23}{6} \dots\dots\dots 1p$

b) $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln(x) dx = \int_1^e (x + 2) \ln(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 2\right) dx = \frac{e^2+9}{4} \dots\dots\dots 1p$

$\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{12}{5} \dots\dots\dots 1p$

c) Aplicăm inegalitatea mediilor, între media geometrică și media aritmetică, pentru două numere reale pozitive $a \neq b \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\text{Avem } \begin{cases} (x+1) \cdot (x+2n) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \\ (x+2) \cdot (x+2n-1) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \\ \dots \\ (x+n) \cdot (x+n+1) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \end{cases}, \text{ de unde obținem}$$

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^{2n} \dots\dots\dots 2p$$

Integrând cele două funcții continue pe intervalul $[0,1]$ și aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite obținem:

$$A_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n) dx < \int_0^1 \left(x+n+\frac{1}{2}\right)^{2n} dx =$$

$$\frac{\left(1+n+\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} < \frac{\left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow (2n+1)A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 4

Maria scrie pe tablă numerele 1, 2, 3, ..., 2025. La fiecare pas, ea alege două numere oarecare x și y din șirul scris pe tablă și le înlocuiește cu $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$, continuând procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr scris.

- a) Dacă Maria șterge la primul pas numerele 2 și 3, aflați ce număr scrie în locul lor.
- b) Arătați că dacă Maria șterge de pe tablă numerele a și b și scrie în locul lor numărul c , atunci are loc egalitatea: $\frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right)$.
- c) Dacă la un anumit moment, numerele existente pe tablă sunt x_1, x_2, \dots, x_n cu $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$, arătați că expresia $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$ este invariantă (nu se modifică atunci când ștergem, de exemplu numerele x_1, x_2 și scriem în locul acestora numărul $x_1 * x_2$).
- d) Aflați numărul rămas pe tablă după 2024 de pași.

Soluție:

a) Calculează $2 * 3 = 1 \dots\dots\dots 1p$

b) $c = a * b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \Rightarrow \frac{1}{c} + 1 = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{b} + 1\right) + \left(\frac{1}{b} + 1\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right) \dots\dots\dots 1p$

c) $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$, unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt numerele scrise la un anumit moment pe tablă. Fără a restrânge generalitatea, înlocuim x_1 și x_2 cu

$$x_1 * x_2 = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}} \Rightarrow \text{pe tablă sunt numerele } x_1 * x_2, x_3, \dots, x_n \Rightarrow$$

$E' = \left(\frac{1}{x_1 * x_2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_3} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right) \stackrel{b)}{=} \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right) = E \Rightarrow E$ este invariantă.....**2p**

d) Inițial $E = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2024} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2025} + 1\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2026}{2025} = 2026$ **2p**

Dacă u este ultimul număr rămas pe tablă atunci $\frac{1}{u} + 1 = 2026 \Rightarrow \frac{1}{u} = 2025 \Rightarrow u = \frac{1}{2025}$**1p**