Olimpiada de Fizică
Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București
9 martie 2025

IX

Subiectul I – *Mișcări uniforme ... și variate*

A. Un pasager a întârziat la tren. Din momentul în care el a ieșit pe peron, prin fața sa a trecut penultimul vagon, în timpul t_1, apoi ultimul, în timpul t_2. Mișcarea trenului este uniform accelerată, iar vagoanele au lungimi egale.

a) Stabilește expresia literală a timpului de întârziere al pasagerului, t, cronometrat din momentul în care trenul s-a pus în mișcare, în funcție de t_1 și t_2.

Întârzierea pasagerului a fost cauzată de faptul că acesta analizează următoarea situație: două mobile se deplasează unul spre celălalt, cu viteze constante având valorile $v_1 = 54\,\text{km/h}$, respectiv $v_2 = 36\,\text{km/h}$. Un porumbel se mișcă între cele două mobile, cu viteza având valoarea $v = 72\,\text{km/h}$, pornind de la primul mobil până la al doilea și se întoarce la primul mobil, în timpul $t = 100\,\text{s}$.

Determină:

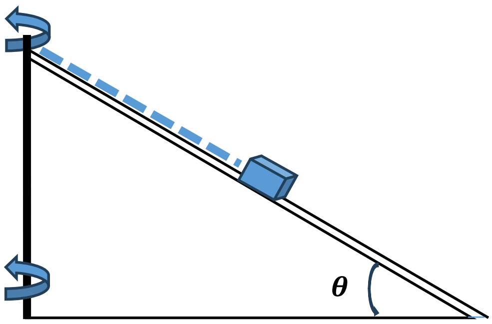
b) distanța inițială dintre cele două mobile;

c) distanța inițială dintre cele două mobile, dacă acestea se mișcă în același sens; porumbelul parcurge drumul de la primul mobil, la al doilea, și înapoi, tot în timpul $t = 100\,s$ (se vor analiza cele două cazuri posibile).

B. Un corp de masă m_1 este așezat pe un plan orizontal, fără frecare. Pe suprafața acestui corp așezăm un al doilea corp, de masă m_2, care se poate deplasa cu frecare, în raport cu primul. Acționăm cu o forță orizontală $\vec{F}$, asupra corpului de masă m_2. Demonstrează faptul că un corp (cel de masă m_1) poate fi accelerat cu ajutorul unei forțe de frecare, stabilind expresiile literale ale accelerațiilor corpurilor, în raport cu solul, în funcție de F, m_1, m_2, μ și g.

Subiectul II - *Învârteli*

Se consideră un plan înclinat care se poate roti în jurul unei axe verticale ce trece prin „vârful” acestuia. Unghiul planului față de orizontală se notează cu θ și este variabil. La vârful planului este atașat un fir elastic de lungime nedeformată L_0 și constantă de elasticitate k. La capătul celălalt al firului se află un corp de masă m, care stă pe suprafața planului înclinat. Planul se poate roti cu diferite frecvențe ν, împreună cu corpul, dar își poate schimba și unghiul de înclinație θ. Se cunosc $k = 200\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $g = 10\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$.



a) Pentru o frecvență ν, $(\nu^2 = 2{,}5\,\text{Hz}^2)$ s-a determinat, prin măsurători, setul de valori ale lungimii x ale firului elastic pentru diferite unghiuri de înclinare ale planului. Utilizând datele experimentale din tabel determină lungimea nedeformată L_0 și masa m a corpului neglijând în calcule forțele de frecare ale corpului cu planul înclinat.

$\theta/°$	$sin\theta$	$cos\theta$	x/m
5	0,0872	0,9962	0,3061
10	0,1736	0,9848	0,3080

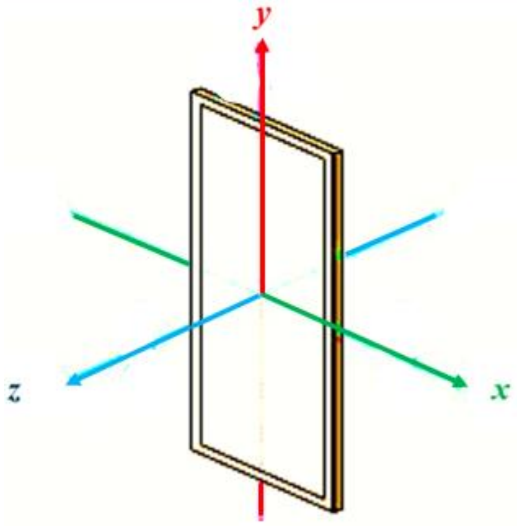
b) Păstrând frecvența de rotație ν, calculează sinusul unghiului maxim de înclinare a planului pentru care corpul încă atinge planul.

c) Fără a se roti planul înclinat, se constată multiple poziții de echilibru ale corpului pe planul înclinat pentru același unghi de înclinație $\theta = 60^\circ$. Considerând coeficientul de frecare $\mu = 0{,}2$, determină distanța d dintre pozițiile extreme de echilibru ale corpului pe plan.

1. Fiecare dintre subiectele I, II, respectiv III se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Subiectul III - *Accelerații*

Un smartphone, prin intermediul unei aplicații software și al accelerometrului cu care este dotat poate înregistra accelerațiile la care este supus, corespunzător celor trei axe ale acestuia. Imaginea alăturată ilustrează cum sunt orientate cele trei axe ale smartphone-ului.



Așezat pe o suprafață orizontală (în repaus), cu axa Z orientată în sus, accelerațiile indicate de smartphone sunt $a_x = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_y = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_z = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) Smartphone-ul este menținut în repaus într-o poziție pentru care accelerațiile corespunzătoare celor trei axe sunt $a_x = 8{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_y = 4{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_z = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Ca să ajungă în această poziție, axa Y a smartphone-ului a fost rotită spre stânga, în plan vertical, față de poziția inițială corespunzătoare figurii din enunț, cu unghiul α care poate avea una din valorile: $\alpha = 30^\circ$ sau $\alpha = 45^\circ$ sau $\alpha = 60^\circ$. Argumentează și calculează care este unghiul α cu care a fost rotită axa Y a smartphone-ului, în plan vertical.

b) Smartphone-ul este lăsat să cadă liber, în poziția precizată de $\alpha = 30^\circ$, de la o anumită înălțime în raport cu o suprafață orizontală, situație în care se constată că forța rezistentă a aerului este neglijabilă. Argumentează și calculează care sunt accelerațiile, în valoare absolută, $|a_x|$ și $|a_y|$ ale smartphone-ului în raport suprafața orizontală.

Indicație: Se constată că dacă smartphone-ul este lăsat să cadă liber, în plan vertical, cu axa Y în poziție verticală, acesta indică accelerațiile: $a_x = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_y = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_z = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Se lasă să cadă smartphone-ul astfel încât axa Z să fie orientată în sus, pe direcție verticală. Smartphone-ul este eliberat la primul moment înregistrat în tabel. În acest caz se constată că accelerația a_z este influențată de o forță de rezistență din partea aerului conform datelor din tabelul de mai jos [$a_z = f(t)$]. Se va considera că forța de rezistență din partea aerului este de tipul $\vec{F} = -C \cdot \vec{v}$, unde C este o constantă și $\vec{v}$ este viteza corpului care cade. Masa smartphone-ului este $m = 210\ \text{g}$, iar constanta $C \simeq 0{,}035\ \text{Kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

a_z/(m/s^2)	9,80	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
t/s	0,305	0,345	0,385	0,425	0,465	0,505	0,545

c) Scrie ecuația principiului fundamental al mecanicii clasice, în situația dată pentru căderea smartphone-ului și în condițiile existenței forței rezistente a aerului, atât sub formă vectorială cât și sub formă scalară, iar pentru forma scalară, exprimă rezultatul în funcție de a_z.

d) Pe baza datelor din tabel estimează distanța parcursă de smarthone-ul în cădere până la momentul $t = 0{,}545\ \text{s}$ și viteza maximă atinsă de acesta la momentul $t = 0{,}545\ \text{s}$.

e) Soluția ecuației precizate anterior este de forma $v(t) = \dfrac{m \cdot g}{C} + (v_0 - \dfrac{m \cdot g}{C}) \cdot e^{-\frac{C \cdot t}{m}}$ unde $v(t)$ este viteza în funcție de timp, v_0 este viteza inițială, t este timpul de cădere, m este masa smartphone-ului, C este constanta corespunzătoare forței de rezistență a aerului, g este accelerația gravitațională, iar e este un număr irațional a cărui valoare este $e \simeq 2{,}7$. Argumentează dacă viteza maximă atinsă de smartphone la momentul $t = 0{,}545\ \text{s}$ este viteza limită pe care o poate atinge acesta¸ în aer, în timpul căderii.

Subiectele au fost propuse de
Prof. dr. ***Daniel LAZĂR*** *– Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara*
Prof. ***Marian ANGHEL*** *– Liceul Teoretic „Petre Pandrea”, Balș*
Prof. ***Victor STOICA*** *– Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”, București*

Olimpiada de Fizică

Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București

9 martie 2025

Barem de evaluare și de notare

Barem Subiectul I – *Mişcări uniforme... şi variate*		**Parțial**	**Punctaj**
A.	**a)** t – timpul cât a întârziat pasagerul, cronometrat din momentul în care trenul s-a pus în mişcare l – lungimea unui vagon În timpul t, trenul a parcurs distanța $x=\frac{at^2}{2}$. În timpul $(t+t_1)$, trenul a parcurs distanța $x_1=\frac{a(t+t_1)^2}{2}$. Diferența acestor distanțe reprezintă lungimea penultimului vagon: $l=x_1-x$ $l=\frac{a}{2}(2tt_1+t_1^2)$ În timpul $(t+t_1+t_2)$, trenul a parcurs distanța $x_2=\frac{a(t+t_1+t_2)^2}{2}$ Diferența distanţelor reprezintă lungimea ultimului vagon: $l=x_2-x_1$ $l=\frac{a}{2}(2tt_2+2t_1t_2+t_2^2)$ $t=\frac{t_2^2+2t_1t_2-t_1^2}{2(t_1-t_2)}$	0,5p 0,5p 0,5p	**1,5p**
A.	**b)** $d=vt_1+v_2t_1$ $d=v_1t+vt_2+v_2t_1$ $t=t_1+t_2$ $d=\frac{(v+v_1)(v+v_2)}{2v}t$ $d=2625m$	0,5p 0,5p 0,5p	**1,5p**
	c) I. $d'=vt_1-v_2t_1$ $d'+v_2t_1=v_1t+vt_2$ $d'=\frac{(v-v_2)(v+v_1)}{2v}t$ $d'=875\ m$ II. $d''=vt_1-v_1t_1$ $d''+v_1t_1=v_2t+vt_2$ $d''=\frac{(v-v_1)(v+v_2)}{2v}t$ $d''=375\ m$	0,5p 0,5p 0,5p 0,5p 0,5p 0,5p	**3p**
B.	$m_2:\ F-F_f=m_2a_2$ $F_f'=F_f$	0,5p	**3p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$m_1: \ F'_f = m_1 a_1 ; \ F_f = m_1 a_1$ m_2 are tendința de deplasare: $F_f \le \mu N ; \ N = m_2 g ;$ Pentru $\mu N = \mu m_2 g$ $a_{1_{max}} = \frac{F_{fm}}{m_1} ; \ a_{1_{max}} = \frac{\mu m_2 g}{m_1}$ Corpurile se vor deplasa cu aceeași accelerație, în raport cu solul, dacă $F \le F_m$. $a_1 = a_2 = a ; \ a = \frac{F}{m_1+m_2}$, dacă $a \le a_{1_{max}}$ $F_m = m_2(a_{1_{max}} + \mu g)$ $F_m = \mu g \frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1}$ Dacă $F > F_m \ \Rightarrow \ a_1 = a_{1_{max}} (a_1 - constantă)$ $a_2 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_2}$	0,5p 0,5p 0,5p 0.5p 0,5p	
Oficiu			**1**
Total subiectul I			**10**

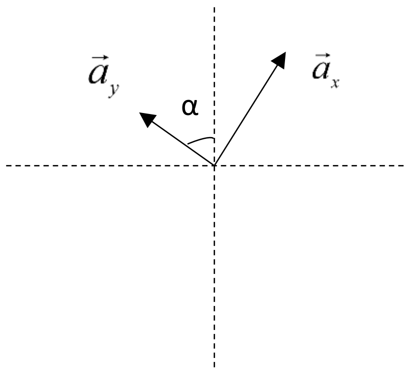
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

IX

Olimpiada de Fizică
Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București
9 martie 2025
Barem de evaluare și de notare

Barem Subiectul II - *Învârteli*		**Parțial**	**Punctaj**
a)	Reprezentare corectă a forțelor $\vec{T} + \vec{G_t} + \vec{F}_{cfx} = 0$ $T = k\Delta x$ $k\Delta x = mgsin\theta + m\omega^2(L_0 + \Delta x)cos^2\theta$ Folosind $x = L_0 + \Delta x$ duce la $x = \dfrac{mgsin\theta + kL_0}{k - m\omega^2 cos^2\theta}$ Utilizarea datelor din tabelul din enunț conduce la rezultatul $m \simeq 1$ kg $L_0 \simeq 0{,}15$ m Se acceptă valori aproximative.	0,75p 0,75p 0,5p 0,5p 0,75p 0,75p	**4**
b)	Condiția limită pentru determinarea unghiului maxim la care corpul de masă m încă atinge planul este: $N = 0\ N$ $\vec{N} + \overrightarrow{G_N} + \vec{F}_{cfy} = 0$ $mgcos\theta = m\omega^2 \dfrac{mgsin\theta + kL_0}{k - m\omega^2 cos^2\theta} cos\theta sin\theta$ $g = \omega^2 \dfrac{mgsin\theta + kL_0}{k - m\omega^2 cos^2\theta} sin\theta$ $sin\theta = \dfrac{kg - mg\omega^2}{kL_0\omega^2}$ $sin\theta = \frac{1}{3}$	0,5p 1p 0,5p 0,5p 0,5p	**3**
c)	Cele două condiții de extrem pentru pozițiile de echilibru sunt: $k\Delta x_1 + \mu mgcos\theta = mgsin\theta$ $k\Delta x_2 = \mu mgcos\theta + mgsin\theta$ Dacă D este distanța dintre cele două poziții: D= $\Delta x_2 - \ \Delta x_1 = \frac{2\mu mgcos\theta}{k}$ $D \simeq 1$ cm	0,5p 0,5p 0,5p 0,5p	**2**
Oficiu			**1**
Total subiectul II			**10**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr><th colspan="2">Barem Subiectul III - Accelerații</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="3">a)</td><td>
</td><td>0,5p</td><td rowspan="3">2p</td></tr>
<tr><td>$|a_x| \cdot \cos(90-\alpha) + a_y \cdot \cos\alpha = 9{,}8$;</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Cum $a_y = 4{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, atunci $\alpha \simeq 60^\circ$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b)</td><td>- În sistemul de referință al smartphone-ului accelerația pe verticală, în cădere liberă, este 0 m/s^2.</td><td>0,25p</td><td rowspan="4">1p</td></tr>
<tr><td>$|a_x| \cdot \sin\alpha + a_y \cdot \cos\alpha = 9{,}8$ (în raport cu suprafața orizontală)</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 9{,}8$</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td>$|a_x| = 4{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $|a_y| = 4{,}9\sqrt{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td rowspan="4">c)</td><td>$m \cdot \vec{g} + C \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{a}$</td><td>0,25p</td><td rowspan="4">1p</td></tr>
<tr><td>$m \cdot g - C \cdot v = m \cdot a$</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td>Cum $a = g - a_z$,</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td>$a_z = \frac{C}{m} \cdot v$</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td rowspan="6">d)</td><td>- La $t = 0{,}305$ s, $v_1 = 0$ m/s și $a_z = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (momentul eliberării telefonului)</td><td>2x0,25</td><td rowspan="6">3,5p</td></tr>
<tr><td>Accelerația față de suprafața orizontală este $a = g - a_z$.</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>a/(m/s^2)</td><td>9,80</td><td>9,70</td><td>9,60</td><td>9,50</td><td>9,40</td><td>9,30</td><td>9,20</td></tr>
<tr><td>t/s</td><td>0,305</td><td>0,345</td><td>0,385</td><td>0,425</td><td>0,465</td><td>0,505</td><td>0,545</td></tr>
</table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Aria de sub graficul curbei $a(t)$ între $t = 0{,}305$ s și $t = 0{,}545$ s este viteza telefonului la finalul acestui interval (suma ariilor trapezelor de sub grafic, fiecare cu înălțimea $\Delta t = 0{,}040$ s).</td><td>0,25p</td></tr>
<tr><td>$$v_{max} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \frac{a_4 + a_5}{2} + \frac{a_5 + a_6}{2} + \frac{a_6 + a_7}{2} \right) \cdot \Delta t$$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$v_{max} \simeq 2{,}28\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.</td><td>0,25p</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Cum $v=\frac{m}{C}a_z$, unde $\frac{m}{C}=6,00\ \text{s}$, atunci
<table>
<tr><td>$v/(\text{m/s})$</td><td>0</td><td>0,60</td><td>1,20</td><td>1,80</td><td>2,40</td><td>3,00</td><td>3,60</td></tr>
<tr><td>t/s</td><td>0,305</td><td>0,345</td><td>0,385</td><td>0,425</td><td>0,465</td><td>0,505</td><td>0,545</td></tr>
</table>
Aria de sub graficul curbei $v(t)$ între $t=0,305\ \text{s}$ și $t=0,545\ \text{s}$ este distanța parcursă de telefon în intervalul de timp considerat (suma ariilor trapezelor de sub grafic, fiecare cu înălțimea $\Delta t=0,040\ \text{s}$).
$d_{\max}=\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_2+v_3}{2}+\frac{v_3+v_4}{2}+\frac{v_4+v_5}{2}+\frac{v_5+v_6}{2}+\frac{v_6+v_7}{2}\right)\cdot\Delta t$
$d_{\max}\simeq 0,43\ \text{m}$.
</td>
<td>0,25p
0,5p
0,25p
0,25p
0,25p</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>e)</td>
<td>
$v(t)=\frac{m\cdot g}{C}+(v_0-\frac{m\cdot g}{C})\cdot e^{-\frac{C\cdot t}{m}}$ și $t\to\infty$ rezultă
$v(\infty)=\frac{m\cdot g}{C}=v_{\lim ita}$
$v_{\lim ita}>v_{\max}$; răspuns NU
</td>
<td>0,5p
0,5p
0,5p</td>
<td>1,5p</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Oficiu</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total subiectul III</td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

Barem propus de:

*Prof. dr. **Daniel LAZĂR** – Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara*

*Prof. **Marian ANGHEL** – Liceul Teoretic „Petre Pandrea”, Balș*

*Prof. **Victor STOICA** – Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”, București*

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

X

Olimpiada de Fizică

Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București

9 martie 2025

Subiectul I. ***Lentilă și ... licurici***

Licuriciul Sclipici, cvasipunctiform, se află la distanța $D = 80$ cm, față de un ecran. Între Sclipici și ecran se așază o lentilă subțire. Pe ecran se obțin două imagini clare ale licuriciului pentru două poziții determinate ale lentilei, situate la distanța $d = 40$ cm una față de alta.

a. *Să se deducă* expresia matematică pentru distanța focală a lentilei în funcție de (D, d), apoi *să se calculeze* valoarea ei și *să se precizeze* natura lentilei, precum și pozițiile ei, față de Sclipici, pentru care se obțin imagini clare ale acestuia pe ecran.

b. Se înlătură ecranul. Licuricii Sclipici și Scânteiuța, ambii cvasipunctiformi, se află de o parte și de alta a lentilei, pe axa principală a acesteia. Inițial ei sunt la distanțele $s_1 = 1$ m, respectiv $s_2 = 75$ cm față de centrul optic al lentilei, apoi pornesc simultan și se mișcă cu viteza contantă $v = 5\ \mathrm{cm/s}$, unul spre celălalt. *Să se determine* momentul de timp, măsurat de la începerea mișcării, la care Sclipici întâlnește imaginea Scânteiuței. *Justificați* răspunsul.

c. Pe axa optică principală a lentilei se află 15 licurici, așezați unul după altul, fiecare de lungime $\ell = 5$ mm. Lanțișorul luminos format din licurici începe cu Sclipici, care se uită către centrul optic al lentilei de la o distanță de 22,5 cm, față de acesta. *Să se determine* lungimea imaginii lănțișorului luminos prin lentilă și *să se calculeze* mărirea liniară longitudinală.

d. Consideră că una din fețele lentilei este plană. *Să se calculeze* distanța focală a sistemului obținut prin argintarea feței plane a lentilei.

Subiectul II. ***Cilindru cu....probleme***

A. Un gaz ideal, închis într-un cilindru vertical fix, lung, cu capetele deschise, este separat de mediul înconjurător prin două pistoane identice, de masă m fiecare și arie S, care se pot deplasa fără frecare. Între pistoane există un perete despărțitor fix, rugos, în care se află un mic orificiu (vezi figura 1). Inițial, temperatura gazului închis este egală cu cea a aerului exterior, iar pistonul inferior este ținut lipit de peretele despărțitor. Când pistonul inferior este eliberat, pistoanele coboară lent. Presiunea exterioară este p_0, iar $mg < p_0 S$.

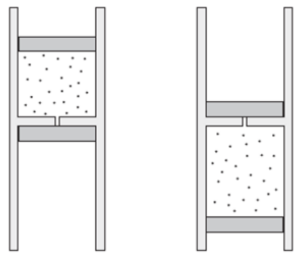


Fig.1

a.1. *Să se determine* presiunea inițială în compartimentul superior și finală în compartimentul inferior.

a.2. Sistemul aflându-se în aceeași stare inițială pistonul inferior este eliberat în două situații distincte:

i. pistoanele, peretele despărțitor și pereții cilindrului sunt buni izolatori termici;

ii. pistoanele, peretele despărțitor și pereții cilindrului sunt buni conductori termici.

Să se determine raportul dintre lungimea finală a compartimentului inferior în prima situație și lungimea finală a compartimentului inferior în cea de a doua situație.

B. Un cilindru de volum V este împărțit în două compartimente de un piston, inițial fixat. În cel superior, de volum $V_{01} = fV$, unde $0 < f < 1$, se află o cantitate ν_1 de gaz la temperatura T_1, iar în cel inferior o altă cantitate ν_2, din același gaz, la o presiune inferioară celei din compartimentul superior, la temperatura T_2 (vezi figura 2). Atât pistonul, cu aria suprafeței S și masă m, cât și cilindrul sunt realizate din materiale izolatoare termic. Pistonul este eliberat, mișcarea lui realizându-se fără frecare. În starea în care gazul, cu exponentul adiabatic γ, considerat ideal, are pentru prima dată aceeași temperatură T în ambele compartimente, pistonul a coborât pe distanța h și are viteza v. Se consideră cunoscută accelerația gravitațională g. *Să se deducă*:

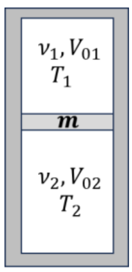


Fig. 2

1. Fiecare dintre subiectele I, II, respectiv III se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

b.1. ecuația de bilanț energetic a sistemului gaze ideale – piston – pământ, exprimată în funcție de $(T,\ T_1, T_2, \nu_1, \nu_2, g, v, m, \gamma, R, h)$;
b.2. viteza pistonului, în funcție de $(g, V, T_1, T_2, \nu_1, \nu_2, f, S, m, \gamma, R)$, pentru momentul în care temperatura în ambele compartimente este T.

Subiectul III. ***Forțe de rezistență***
Indicații:

1. *Rezistența întâmpinată de un corp sferic care se mișcă printr-un mediu vâscos este determinată de o forță de rezistență, $\vec{F}_r$, orientată în sens opus vitezei relative, $\vec{v}$, a corpului față de fluid, proporțională cu modulul acesteia și cu raza lui, R: $\vec{F}_r = -kR\vec{v}$ (legea lui Stokes).*
2. *Pentru ecuația de mișcare de forma $ma + bv = F$, legile vitezei și coordonatei sunt $v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{bt}{m}} + \frac{F}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$, respectiv $x(t) = x_0 + \left(v_0 - \frac{F}{b}\right) \cdot \frac{m}{b} \cdot \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) + \frac{F}{b}t$.*

Un grăunte de nisip fin, presupus sferic, de rază $R = 0{,}1$ mm și densitate $\rho = \frac{12}{\pi}$ g·cm^{-3}, se află în aer, considerat mediu vâscos static, pentru care se cunoaște coeficientul legii Stokes $k = 200$ mg·m$^{-1}\cdot$ s^{-1}. Se dau: accelerația gravitațională $g = 10$ m·s^{-2} și $e^{1{,}25} \cong 3{,}5$, unde e este baza logoritmului natural.

A. Grăuntele este lansat pe verticală de la nivelul de referință (nivelul solului).
a. *Să se determine* viteza v_0 cu care trebuie aruncat grăuntele, astfel încât el să se oprească în aer după timpul $t_0 = 1$ s și înălțimea h la care se va opri acesta.
b. *Să se determine* forța medie de rezistență în cursul mișcării de urcare, pentru situația descrisă anterior.
c. *Să se calculeze* viteza cea mai mare care poate fi atinsă (*viteza limită*) în cursul mișcării de coborâre de la înălțimea h.

B. Grăuntele este lansat cu viteza $v_0 = 20\sqrt{2}$ m·s^{-1} sub un unghi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad , de la nivelul de referință (nivelul solului).
a. *Să se determine* timpul după care grăuntele ajunge la înălțimea maximă și coordonatele celui mai înalt punct al traiectoriei acestuia.
b. *Să se determine* masa de acid benzoic solid ($\lambda_t = 250$ J·g^{-1}, $\lambda_v = 600$ J·g^{-1}) ce poate fi sublimată cu întreaga cantitate de energie pe care o au $n = 10^9$ astfel de mici corpuri sferice, la momentul $t_c = 2$ s de la începutul mișcării.

Subiectele au fost propuse de:
***Prof. dr. Gabriel FLORIAN**, Colegiul Național „Carol I”, Craiova*
***Prof. Constantin GAVRILĂ**, Colegiul Național „Sf. Sava”, București*
***Prof. Ovidiu TRIPȘA**, Colegiul Național „Dr. Ioan Meșotă”, Brașov*

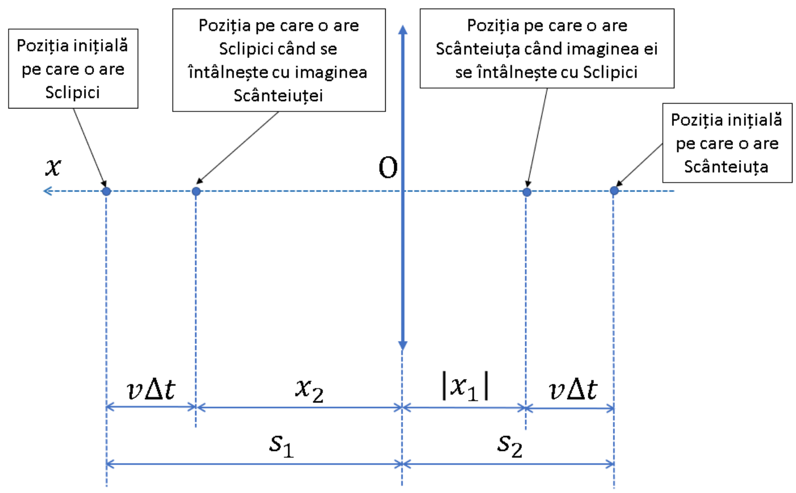
Olimpiada de Fizică

Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București

9 martie 2025

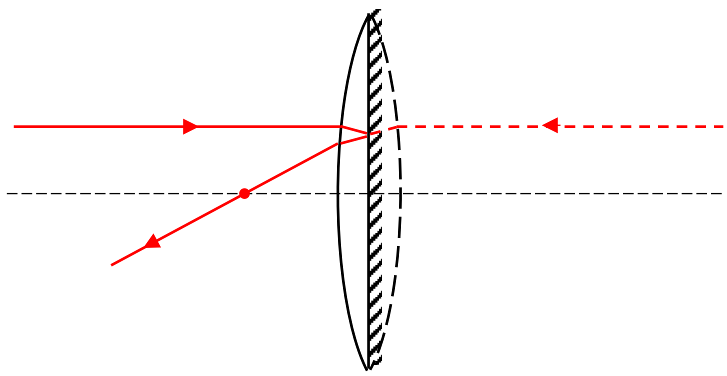
Barem de evaluare și de notare

X

Barem Subiectul I. *Lentilă și ... licurici*		Parțial	Punctaj
a.	Pentru prima poziția a lentilei: $$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$$ $$D=-x_1+x_2$$	0,50p	3
	Efectuând calculele se obține ecuația: $$x_1^2+Dx_1+Df=0$$	0,50p	
	Cu soluțiile: $$x_1=\frac{-D+\sqrt{D^2-4Df}}{2}$$ $$x'_1=\frac{-D-\sqrt{D^2-4Df}}{2}$$	0,50p	
	Distanța între cele două poziții determinate ale lentilei pentru a obține pe ecran două imagini clare ale licuriciului este: $$d=-x'_1-(-x_1)$$	0,25p	
	Efectuând calculele, distanța focală a lentilei este: $$f=\frac{D^2-d^2}{4D}$$	0,50p	
	Numeric: $f=15\ \text{cm}=0{,}15\ \text{m}$	0,25p	
	Deoarece: $$f>0$$ ***lentila este convergentă.***	0,25p	
	Distanțele de la lentilă la Sclipici sunt: $$x_1=-20\ \text{cm}=-0{,}20\ \text{m}$$ $$x'_1=-60\ \text{cm}=-0{,}60\ \text{m}$$	0,25p	
b.	Cu notațiile din ***Figura 1.R.***:  ***Figura 1.R.*** $$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{\lvert x_1\rvert}=\frac{1}{f}$$	0,50p	3

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Unde: $$\lvert x_1\rvert = s_2 - v\Delta t$$ $$x_2 = s_1 - v\Delta t$$	0,50p	
	Efectuând calculele, obținem ecuația: $$v^2(\Delta t)^2 - v(s_1 + s_2 - 2f)\Delta t + s_1 s_2 - (s_1 + s_2)f = 0$$	0,50p	
	Cu soluțiile: $$(\Delta t)_{1,2} = \frac{1}{2v}\left[s_1 + s_2 - 2f \pm \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + 4f^2}\right]$$	0,25p	
	Numeric: $$(\Delta t)_1 \cong 10{,}59 \text{ s}$$ $$(\Delta t)_2 \cong 18{,}41 \text{ s}$$	0,25p	
	Intervalul de timp în care Scânteiuța ajunge în focarul obiect al lentilei este: $$\Delta\tau = \frac{s_2 - f}{v};\ \Delta\tau = 12 \text{ s}$$	0,25p	
	După intervalul de timp $\Delta\tau$ imaginea Scânteiuței va fi virtuală.	0,25p	
	Deoarece: $$(\Delta t)_2 > \Delta\tau$$ soluția $(\Delta t)_2$ nu are sens fizic.	0,25p	
	Intervalul de timp, de la începerea mișcării, în care Sclipici întâlnește imaginea Scânteiuței este: $$(\Delta t)_1 \cong 10{,}59 \text{ s}$$	0,25p	
c.	Mărirea liniară longitudinală a lănțișorului luminos format din cei 15 licurici este: $$\gamma = \frac{x_2 - x'_2}{x_1 - x'_1}$$ unde x_1 și x'_1 sunt coordonatele extremităților lănțișorului luminos obiect, iar x_2 și x'_2 sunt extremitățile imaginii lănțișorului luminos.	0,25p	2
	Din relația: $$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$$	0,25p	
	Cu $x_1 = -22{,}5$ cm și efectuând calculele obținem: $$x_2 = 45 \text{ cm} = 0{,}45 \text{ cm}$$	0,25p	
	Din relația: $$\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f}$$	0,25p	
	Unde: $$\lvert x'_1\rvert = \lvert x_1\rvert + 15\ell;\ x'_1 = -30 \text{ cm} = -0{,}30 \text{ m}$$	0,25p	
	Efectuând calculele obținem: $$x'_2 = 30 \text{ cm} = 0{,}30 \text{ m}$$	0,25p	
	Lungimea imaginii lănțișorului luminos este: $$L = 15 \text{ cm} = 0{,}15 \text{ m}$$	0,25p	
	Mărirea liniară longitudinală este: $$\gamma = 2$$	0,25p	

d.	În urma argintării feței plane a lentilei, convergența sistemului este: $C_s = -2C \Leftrightarrow \frac{1}{f_s} = -2\frac{1}{f}$	0,5p	**1**
	Distanța focală a sistemului obținut prin argintarea feței plane a lentilei este: $f_s = -\frac{f}{2}$	0,25p	
	Numeric: $f_s = -7{,}5\text{ cm} = -0{,}075\text{ m}$	0,25p	
	Metodă echivalentă: Având în vedere imaginea formată de oglinda plană, sistemul optic descris se comportă ca și cum fasciculul de raze paralele ar veni din stânga și ar trece printr-o lentilă biconvexă simetrică (sistemul acolat format din lentila plan-convexă și imaginea ei în oglinda plană). Focarul imagine se află în partea dinspre care vine inițial lumina, deci este caracterizat de o coordonată negativă, $f_s < 0$ $\left\lvert\frac{1}{f_s}\right\rvert = (n-1)\frac{2}{R} = \frac{2}{f} \Rightarrow \lvert f_s\rvert = \frac{f}{2} \Rightarrow$ $\lvert f_s\rvert = 7{,}5\text{ cm} = 0{,}075\text{ m}$ 	(1p)	
Oficiu			**1**
Total subiectul I			**10**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Barem Subiectul II. ***Cilindru cu ....probleme***		**Parțial**	**Punctaj**
A.			
a.1.	Din condiția de echilibru mecanic a fiecărui piston (pistoanele coboară încet) – sau din teorema de variație a energiei cinetice aplicată fiecărui piston, rezultă că: $F_0 + G = F_1$	0,50	**2**
	de unde: $$p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$$	0,50	
	și respectiv: $F_0 = F_2 + G$	0,50	
	de unde: $$p_2 = p_0 - \frac{mg}{S}$$	0,50	
	Se observă că cele două presiuni sunt constante, diferite și independente de izolarea termică a sistemului.		
a.2.i.	Lucrul mecanic efectuat de gazul din compartimentul superior este: $$L_{gaz,1} = -p_1 V_1$$ iar cel efectuat de gazul din compartimentul inferior este: $$L_{gaz,2} = p_2 V_2$$	0,20p	**1**
	Sistemul fiind **izolat termic**, gazul nu primește și nu cedează căldură, astfel încât, conform primului principiu al termodinamicii: $$\Delta U_1 + L_{gaz,1} + \Delta U_2 + L_{gaz,2} = 0$$ unde: $\Delta U_1 = -\nu C_V T_1$ și $\Delta U_2 = \nu C_V T_2$	0,20p	
	Obținem: $$p_1 V_1 - p_2 V_2 = \nu C_V T_2 - \nu C_V T_1$$	0,20p	
	Deoarece: $$\frac{C_V}{R} \neq 1$$ rezultă că: $$p_1 V_1 - p_2 V_2 = 0$$	0,20p	
	de unde: $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}$ și în consecință $\ell_2 = \frac{p_1 V_1}{S p_2}$	0,20p	
a.2.ii.	Gazul este mereu în echilibru termic cu mediul înconjurător, temperatura finală este egală cu cea inițială.	0,50p	**1**
	$$V_2' = \frac{p_1 V_1}{p_2}$$ de unde $$\ell_2' = \frac{p_1 V_1}{S p_2}$$ astfel: $$\frac{\ell_2'}{\ell_2} = 1$$	0,50p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

B.			
b.1.	Deoarece sistemul este izolat adiabatic: $$Q_1 + Q_2 = 0$$	0,50p	**2**
	Conform primului principiu al termodinamicii: $$\Delta U_1 + L_1 + \Delta U_2 + L_2 = 0$$	0,50p	
	Din teorema de variație a energiei cinetice: $$\Delta E_C = L_1 + L_2 + L_G$$	0,50p	
	Din cele trei relații rezultă că: $$\frac{\nu_1 R}{\gamma-1}(T-T_1) + \frac{\nu_2 R}{\gamma-1}(T-T_2) + \frac{mv^2}{2} - mgh = 0$$	0,50p	
b.2.	Fiecare gaz în parte suferă o transformare adiabatică, astfel că: • pentru gazul din compartimentul superior: $$T_1 V_{01}^{\gamma-1} = T V_1^{\gamma-1}$$ • pentru gazul din compartimentul inferior: $$T_2 V_{02}^{\gamma-1} = T V_2^{\gamma-1}$$	0,80p	**3**
	Din ecuațiile pentru transformările adiabatice de mai sus obținem: $$x\frac{f}{1-f} = \frac{fV + Sh}{(1-f)V - Sh}$$ unde: $$x = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$ Rezultă: $$h = \frac{V}{S} f(1-f)\frac{x-1}{1+f(x-1)}$$	0,80p	
	Temperatura T este: $$T = \left[f T_1^{\frac{1}{\gamma-1}} + (1-f) T_2^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]^{\gamma-1} = T_2[1 + f(x-1)]^{\gamma-1}$$	0,80p	
	Viteza pistonului este: $$v = \sqrt{2gh + \frac{2R}{m(\gamma-1)}[\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 - (\nu_1+\nu_2)T]}$$ cu T și h date mai sus.	0,60p	
Oficiu			**1**
Total subiectul II			**10**

Barem Subiectul III. ***Forțe de rezistență***		**Parțial**	**Punctaj**
A.			
a.	Pentru **Principiul al II-lea al mecanicii:** $$m\vec{a} = -kR\vec{v} + m\vec{g}$$ în proiecție pe axa mișcării, orientată în sus. $$ma + kRv = -mg$$	0,25p	**2**
	Masa grăuntelui se poate exprima ca: $$m = \rho V = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$	0,25p	
	Identificăm ecuația, conform indicației: $$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 \cdot a + kR \cdot v = -\frac{4\pi}{3}\rho R^3 g$$ Unde: $$m = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$ $$b = kR$$ $$F = -\frac{4\pi}{3}\rho R^3 g.$$ Ecuațiile care rezultă sunt: $$v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}} - \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}\left(1 - e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}}\right)$$ $$x(t) = \left(v_0 + \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}\right) \cdot \frac{4\pi\rho R^2}{3k}\left(1 - e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}}\right) - \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k} \cdot t$$	0,50p	
	În momentul t_0, viteza corpului trebuie să se anuleze, prin urmare este valabilă relația: $$v_0 = \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}\left(e^{\frac{3kt_0}{4\pi\rho R^2}} - 1\right)$$	0,25p	
	Valoarea numerică a vitezei inițiale: $$v_0 = 20\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$	0,25p	
	La t_0, este valabilă relația: $$h = x(t_0) = \left(v_0 + \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}\right) \cdot \frac{4\pi\rho R^2}{3k}\left(1 - e^{-\frac{3kt_0}{4\pi\rho R^2}}\right) - \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k} \cdot t_0$$	0,25p	
	Valoarea numerică a înălțimii maxime: $$h = 8\ \mathrm{m}$$	0,25p	
b.	Aplicăm teorema de variație a impulsului: $$(\vec{F}_{rm} + \vec{G})\Delta t = \Delta\vec{p}$$	0,25p	**1,5**
	Unde: $$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$	0,25p	
	Teorema de variație a impulsului proiectată pe direcția și în sensul mișcării este: $$-F_{rm} - G = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$	0,25p	

	Deci: $$-F_{r_m} - mg = -\frac{mv_0}{t_0}$$	0,25p	
	Rezultă: $$F_{r_m} = m\left(\frac{v_0}{t_0} - g\right)$$	0,25p	
	Valoarea numerică a forței medii de rezistență este: $$F_{r_m} = 16 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{N}$$	0,25p	
c.	Viteza limită se atinge atunci când accelerația este nulă (forța de greutate se echilibrează cu forța de rezistență Stokes): $$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 g - kRv_{lim} = 0$$ Prin urmare: $$v_{lim} = \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}$$	0,25p	**0,5**
	Valoarea numerică a vitezei limită: $$v_{lim} = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$	0,25p	
B.			
a.	Pentru **Principiul al II-lea al mecanicii:** $$m\vec{a} = -kR\vec{v} + m\vec{g}$$ Pe cele două axe ale mișcării, rezultă ecuațiile de mișcare: $$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 a_x + kRv_x = 0$$ $$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 a_y + kRv_y = -\frac{4\pi}{3}\rho R^3 g$$	0,75p	**3,5**
	Identificăm ecuația, conform indicației: $$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 \cdot a_x + kR \cdot v_x = 0$$ unde $m = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$, $b = kR$, $F = 0$. Deoarece: $$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$ Ecuațiile care rezultă sunt: $$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}}$$ $$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{4\pi\rho R^2}{3k}\left(1 - e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}}\right)$$	0,75p	
	Identificăm ecuația, conform indicației: $$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 \cdot a_y + kR \cdot v_y = -\frac{4\pi}{3}\rho R^3 g$$ unde $m = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$, $b = kR$, $F = -\frac{4\pi}{3}\rho R^3 g$. Deoarece: $$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$ Ecuațiile care rezultă sunt:	0,75p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}} - \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}\left(1 - e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}}\right)$$ $$y(t) = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k}\right) \cdot \frac{4\pi\rho R^2}{3k}\left(1 - e^{-\frac{3kt}{4\pi\rho R^2}}\right) - \frac{4\pi\rho R^2 g}{3k} \cdot t$$		
	Punctul maxim al traiectoriei se atinge acolo unde $v_y(T) = 0$, prin urmare: $$e^{-\frac{3kT}{4\pi\rho R^2}} = \frac{4\pi\rho R^2 g}{4\pi\rho R^2 g + 3kv_0 \sin\alpha}$$ Adică: $$T = \frac{4\pi\rho R^2}{3k}\ln\left(1 + \frac{3kv_0 \sin\alpha}{4\pi\rho R^2 g}\right);\ T = 1\ \mathrm{s}$$	0,25p	
	La înălțimea maximă sunt valabile relațiile: $$X = x(T) = \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{g + \frac{3kv_0 \sin\alpha}{4\pi\rho R^2}}$$ $$Y = y(T) = g\left(\frac{4\pi\rho R^2}{3k}\right)^2\left[\frac{3kv_0 \sin\alpha}{4\pi\rho R^2 g} - \ln\left(1 + \frac{3kv_0 \sin\alpha}{4\pi\rho R^2 g}\right)\right]$$	0,50p	
	Valorile numerice ale coordonatelor punctului de maxim: $X = 11{,}42\ \mathrm{m}$ $Y = 8{,}00\ \mathrm{m}$	0,50p	
b.	Coordonatele și vitezele obiectului la t_c se pot determina cu ajutorul ecuațiilor descoperite la **a)**. Valorile numerice sunt: $y = 4{,}57\ \mathrm{m}$ $v_x = +1{,}63\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ $v_y = -5{,}71\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	0,25p	**1,5**
	Energia totală a corpului în această stare este: $$E = \frac{4\pi\rho R^3}{3}\left[gy + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)\right]$$	0,50p	
	Masa de acid benzoic ce poate fi sublimată cu întreaga cantitate de energie, în condițiile problemei este: $$M = \frac{nE}{\lambda_t + \lambda_v} = n \cdot \frac{4\pi\rho R^3}{3(\lambda_t + \lambda_v)}\left[gy + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)\right]$$	0,50p	
	Valoarea numerică a masei: $M = 1{,}19\ \mathrm{g}$	0,25p	
Oficiu			**1**
Total subiectul III			**10**

Barem propus de:
***Prof. dr. Gabriel FLORIAN**, Colegiul Național „Carol I”, Craiova*
***Prof. Constantin GAVRILĂ**, Colegiul Național „Sf. Sava”, București*
***Prof. Ovidiu TRIPȘA**, Colegiul Național „Dr. Ioan Meșotă”, Brașov*

Subiectul I - Levitație și oscilații în câmp magnetic

Deasupra unui solenoid vertical, foarte lung, în contact cu capătul acestuia, este așezată o placă orizontală subțire, nemagnetică. Pe placă este așezat un inel subțire dintr-un material supraconductor, poziționat coaxial cu solenoidul. Inițial, intensitatea I_s a curentului electric prin spirele solenoidului și intensitatea I a curentului electric prin inel sunt nule. Când un curent trece prin spirele solenoidului, un câmp magnetic neuniform este generat la capătul solenoidului. Componentele verticală B_z și radială B_r ale inducției magnetice la capătul solenoidului (FIGURA 1) sunt date de relațiile:

$$B_z = B_0(1 - \alpha z)$$
$$B_r = B_0 \beta r$$

unde α și β sunt constante, B_0 depinde de valoarea curentului electric prin solenoid, z și r sunt coordonatele verticale și respectiv radiale, iar originea sistemului de axe se consideră la capătul solenoidului. La un moment dat, prin spirele solenoidului începe să circule un curent electric I_s, care crește treptat.

Precizare: Un material supraconductor este caracterizat de rezistivitate electrică nulă. Prin urmare, fluxul magnetic prin suprafața inelului supraconductor este constant. Inițial, fluxul magnetic prin inel este nul.

a) Pentru un solenoid foarte lung având n spire pe unitatea de lungime și străbătut de un curent electric cu intensitatea I_s, scrieți expresia inducției magnetice în interiorul solenoidului, la mijlocul acestuia. Utilizați acest rezultat pentru a deduce expresia inducției magnetice produse de solenoid într-un punct aflat pe axa solenoidului, la capătul acestuia.

b) Determinați valoarea critică I_c a intensității curentului electric prin solenoid, pentru care inelul supraconductor începe să leviteze deasupra plăcii.

c) Determinați înălțimea la care se ridică inelul deasupra capătului solenoidului, când $I_s = 2I_c$.

d) Determinați frecvența micilor oscilații ale inelului, când $I_s = 2I_c$ (se presupune că inelul este deplasat de la poziția de echilibru pe o distanță mică Δz, coaxial cu solenoidul).

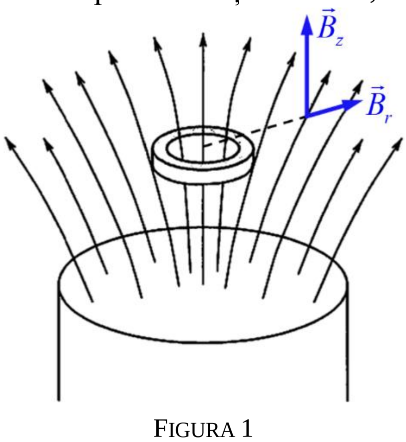


FIGURA 1

Se cunosc: $\alpha = 36\ \mathrm{m^{-1}}$, $\beta = 18\ \mathrm{m^{-1}}$, masa inelului $m = 100\ \mathrm{mg}$, inductanța inelului $L = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{H}$, numărul de spire ale solenoidului pe unitatea de lungime $n = 10^3\ \mathrm{m^{-1}}$, suprafața inelului $S = 1\ \mathrm{cm^2}$, permeabilitatea magnetică a vidului $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H/m}$ și accelerația gravitațională $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

1. Fiecare dintre subiectele I, II, respectiv III se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Subiectul II – Sistem oscilant cu elemente elastice pneumatice

Sistemul oscilant din FIGURA 2 este compus din două pistoane de mase $m_1 = m$ și $m_2 = 2m$, legate între ele cu o tijă rigidă de lungime egală cu $2l$ și de masă neglijabilă. Cele două pistoane, care au ariile secțiunilor transversale egale cu $S_1 = S$ și $S_2 = 2S$, împreună cu tija rigidă, sunt montate în interiorul a doi cilindri coaxiali sudați unul de celălalt și închiși la capete, ca în figură, astfel încât se formează trei compartimente (C_1), (C_2) și (C_3) ce conțin gaze *monoatomice* aflate în condiții fizice normale de presiune și temperatură (p_0, T_0).

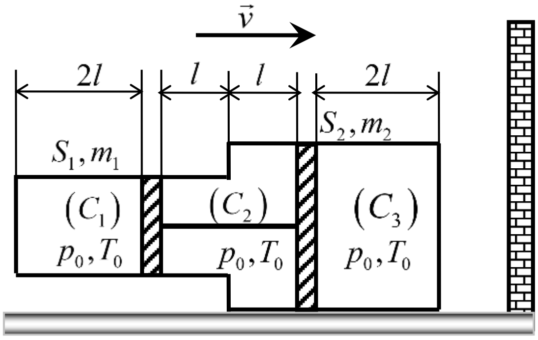


FIGURA 2

În starea inițială cei doi cilindri sunt așezați în poziție orizontală iar pistoanele, presupuse etanșe, mobile și fără frecare, sunt poziționate în interiorul acestora ca în figură.

Pentru inițierea oscilațiilor, sistemul format din cei doi cilindri împreună cu cele două pistoane, aflat în mișcare cu viteza $\vec{v}$, se ciocnește perfect plastic de un perete masiv după care rămâne fixat de acesta (sudat).

Se presupune că cilindrii și pistoanele sunt confecționate din materiale rigide și termoizolatoare.

a) Considerând că viteza de ciocnire este mică, determinați perioada micilor oscilații, $T_{osc.}$, ale sistemului format din cele două pistoane .

b) Determinați viteza maximă $v_{\max}$ a sistemului format din cei doi cilindri împreună cu cele două pistoane, astfel încât după ciocnirea acestuia cu peretele masiv, pistonul cu secțiunea (mai mică) $S_1 = S$ să nu părăsească cilindrul în care este montat.

c) Determinați presiunile p_1, p_2 și p_3 ale gazelor închise în *cele trei compartimente etanșe* în momentul în care pistoanele ajung pentru prima dată în stare de repaus după ciocnirea cu viteza $v_{\max}$ dintre sistemul oscilant și peretele masiv.

Notă: Pentru valori mici ale cantității notate cu x este valabilă următoarea relație de aproximare: $(1+x)^{\alpha} \cong 1+\alpha x$, în care α este un număr real.

Subiectul III – Tubul lui Kundt

Tubul lui Kundt este un dispozitiv experimental inventat în 1866 de fizicianul german August Kundt pentru a măsura viteza sunetului în gaze și în solide. Dispozitivul constă dintr-un tub transparent în interiorul căruia se află o pudră din particule fine (praf de plută sau talc), inițial distribuită uniform.

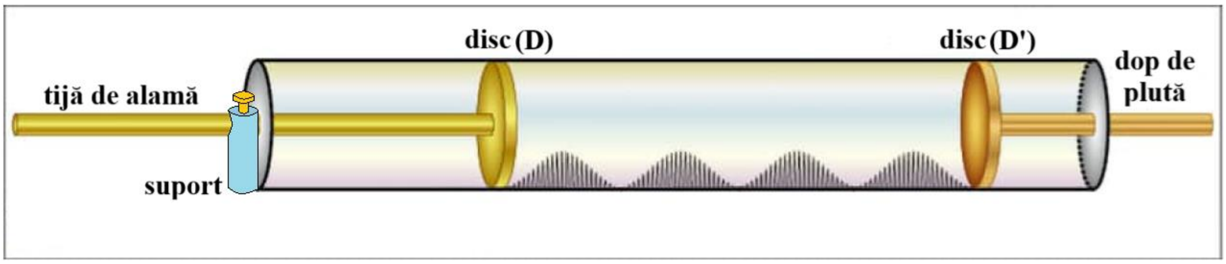


FIGURA 3

1. Fiecare dintre subiectele I, II, respectiv III se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Tubul are la unul dintre capete un suport care fixează o tijă de alamă prevăzută cu un disc (D). Celălalt capăt al tubului este închis cu un dop și un disc metalic (D'), pentru a permite reglarea distanței dintre discuri. Schema dispozitivului experimental poate fi observată în FIGURA 3.

Etapa I

Într-o primă etapă a experimentului, tija și discul D sunt înlocuite de un difuzor plasat la capătul tubului și conectat la un generator de semnal (FIGURA 4).

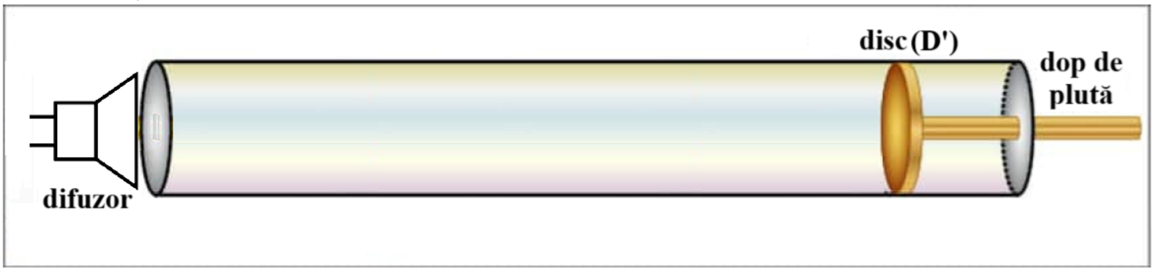


FIGURA 4

Cu ajutorul difuzorului conectat la generatorul de semnal se produce, la capătul tubului, un sunet de frecvență ν. Se ajustează poziția discului D' până când sunetul din tub devine brusc mult mai puternic. Se constată că pulberea din tub se așază în mici grămăjoare, dispuse echidistant. Experimentul se repetă pentru diferite valori ale frecvenței, iar pentru fiecare caz se măsoară distanța d dintre centrele a două grămăjoare consecutive. Datele experimentale culese sunt prezentate în tabelul alăturat.

Nr. crt.	ν / Hz	d / cm
1	4000	4,0
2	3300	5,0
3	3000	5,5
4	2500	7,0
5	2000	8,0
6	1600	10,5
7	1100	15,0
8	1000	16,5

Sarcina de lucru nr. 1: Explicați de ce pulberea din tub se organizează în grămăjoare dispuse echidistant. Precizați rolul presiunii și vitezei particulelor de aer în formarea acestor acumulări de pulbere.

Sarcina de lucru nr. 2: Reprezentați grafic, pe hârtia milimetrică, dependența de perioadă a lungimii de undă a sunetului în aer. Folosiți graficul pentru a determina viteza sunetului în aer.

Etapa a II-a

Experimentul este reluat folosind dispozitivul experimental din FIGURA 3. Aerul din tub se găsește în aceleași condiții de la etapa precedentă. Tija de alamă are lungimea $\ell = 90$ cm și este fixată la mijlocul ei în suportul de la capătul tubului. Se freacă tija longitudinal cu o bucată de piele acoperită cu rășină. Ca urmare, tija vibrează emițând un sunet înalt. Oscilațiile sunt transmise discului și aerului din tub. Pulberea se așază în mici grămăjoare echidistante. Distanța dintre două grămăjoare consecutive este $d = 8,5$ cm.

Sarcina de lucru nr. 3: Calculați viteza de propagare a sunetului în alamă.

Sarcina de lucru nr. 4: Viteza sunetului în gaz depinde doar de densitatea gazului, de presiunea la care se găsește acesta și de constante adimensionale. Folosind această informație și utilizând analiza dimensională, găsiți relația de dependență a vitezei sunetului în gaz de densitatea și presiunea gazului, $\mathrm{v} = \mathrm{v}(p, \rho)$. **Notă:** Analiza dimensională este o metodă folosită pentru a verifica și deduce relații între mărimi fizice, bazându-ne pe exprimarea unităților de măsură în funcție de unitățile fundamentale și pe compararea dimensiunilor fizice ale termenilor dintr-o relație.

Sarcina de lucru nr. 5: Folosind relația determinată anterior $\mathrm{v}=\mathrm{v}(p,\rho)$ și presupunând că aerul se comportă ca un gaz ideal, demonstrați că viteza sunetului în aer depinde de temperatură. Pentru temperaturi nu foarte depărtate de $0°\mathrm{C}$, exprimați această relație într-o formă liniară de tipul $\mathrm{v}=\mathrm{v}_0+k\cdot t$. Cunoscând că viteza determinată la Sarcina de lucru nr.2 reprezintă viteza sunetului în aer la $0°\mathrm{C}$, determinați valorile numerice ale constantelor v_0 și k.

Subiectele au fost propuse de:
***Prof. dr. Adrian BODNARESCU**, Colegiul Național „Eudoxiu Hurmuzachi”, Rădăuți*
***Prof. dr. Leonaș DUMITRAȘCU**, Liceul Teoretic “Mihail Kogălniceanu”, Vaslui*
***Prof. Aura VĂSII**, Colegiul Național Militar „Dimitrie Cantemir”, Breaza*
***Prof. Liviu BLANARIU**, Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație, București*

VEI FOLOSI ACEASTĂ FOAIE PENTRU TRASAREA GRAFICULUI DE LA SUBIECTUL III

NU SEMNA ACEASTĂ FOAIE! FOAIA VA FI ATAȘATĂ LUCRĂRII TALE

Barem Subiectul I: Levitație și oscilații în câmp magnetic		**Parțial**	**Punctaj**
a)	Inducția magnetică B, în interiorul unui solenoid foarte lung, la mijlocul acestuia, este: $B = \mu_0 I_s n$	0,5	**1,5 p**
	Putem privi solenoidul ca fiind format din doi solenoizi foarte lungi, identici, aflați unul în continuarea celuilalt. În acest fel, câmpul magnetic în punctul aflat la mijlocul solenoidului este rezultatul suprapunerii câmpurilor create, la capăt, de cei doi solenoizi. Câmpurile magnetice fiind identice, inducția magnetică la capătul unui solenoid foarte lung este: $$B_0 = \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\mu_0 I_s n$$	1,0	
b)	Considerăm inelul situat la distanța z de capătul solenoidului. Fluxul magnetic total este: $$\Phi = B_z S + LI = B_0(1-\alpha z)S + LI$$ unde I este curentul indus în inel.	0,4	**3,0 p**
	Supraconductorul conservă fluxul magnetic. Inițial, fluxul magnetic este zero, de aceea: $$I(z) = -\frac{B_0(1-\alpha z)S}{L}$$ Semnul „minus” indică faptul că sensul curentului prin inel este opus sensului curentului prin spirele solenoidului. Prin urmare, inelul este respins de solenoid.	0,4	
	Forța electromagnetică dintre inel și solenoid are sensul de jos în sus. $$F_z = F_{em} - mg = \lvert I(z)\rvert B_r 2\pi r_0 - mg$$ unde r_0 este raza inelului.	0,4	
	Se obține: $$F_z = \frac{B_0^2(1-\alpha z)S^2}{L}2\beta - mg$$	0,4	
	La echilibru, $F_z = 0$, astfel: $$B_0^2(1-\alpha z) = \frac{mgL}{2\beta S^2}$$	0,4	
	Înlocuind expresia pentru B_0, rezultă: $$\left(\frac{1}{2}\mu_0 I_s n\right)^2(1-\alpha z) = \frac{mgL}{2\beta S^2}$$	0,4	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Pentru $z = 0$, se obține valoarea critică a curentului: $$I_s = I_c = \sqrt{\frac{mgL}{2\beta}\frac{2}{S\mu_0 n}}$$	0,3	
	Numeric: $I_c = 11{,}1\ \mathrm{A}$	0,3	
c)	Pentru $I_s > I_c$, inelul levitează deasupra solenoidului, la o înălțime $z = z_0$ (coaxial cu solenoidul). Astfel, $$(1 - \alpha z_0) = \left(\frac{I_c}{I_s}\right)^2$$	1,0	**2,0 p**
	Dacă $I_s = 2I_c$, atunci $$z_0 = \frac{3}{4\alpha} = 2{,}1\ \mathrm{cm}$$	1,0	
d)	În acest caz, $I_s = 2I_c =$ constant, iar inducția magnetică la capătul solenoidului este: $$B_0 = \mu_0 I_c n$$	0,5	**2,5 p**
	Pentru o deplasare mică Δz de la poziția de echilibru, se obține (folosind $z = z_0 + \Delta z$): $$F_z = \frac{B_0^2(1 - \alpha z_0)S^2}{L}2\beta - \frac{B_0^2 \alpha \Delta z S^2}{L}2\beta - mg$$	0,5	
	$$F_z = -\frac{2\alpha\beta B_0^2 S^2}{L}\Delta z$$	0,5	
	Se observă că această forță este cvasi-elastică, având coeficientul de elasticitate: $$k = \frac{2\alpha\beta B_0^2 S^2}{L}$$	0,5	
	Frecvența micilor oscilații ale inelului, de-o parte și de alta a poziției de echilibru, este: $$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 6{,}0\ \mathrm{Hz}$$	0,5	
	Oficiu		**1 p**
	Total Subiectul I		**10 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Barem Subiectul II: Sistem oscilant cu elemente elastice pneumatice.		**Parțial**	**Punctaj**
a.	În urma ciocnirii plastice cei doi cilindri se opresc dar pistoanele continuă să se deplaseze, în virtutea inerției, spre peretele masiv. Presupunem că acestea s-au deplasat față de poziția lor de echilibru cu o distanță mică notată cu x. Volumele inițiale ocupate de gazele închise în cele trei compartimente sunt: $V_{01}=2lS_1=2Sl$, $V_{02}=(S_1+S_2)l=3Sl$ și $V_{03}=2lS_2=4Sl$.	0,3	3,5 p
	După deplasarea pistoanelor spre peretele masiv cu distanța x, volumele celor trei compartimente devin: $V_1=S(2l+x)$, $V_2=S(3l+x)$ și $V_3=2S(2l-x)$. Observăm că $V_1>V_{01}$, $V_2>V_{02}$ și $V_3<V_{03}$ (gazele din compartimentele (C_1) și (C_2) se destind adiabatic, în timp ce gazul din compartimentul (C_3) se comprimă adiabatic).	0,3	
	Presiunile gazelor din cele trei compartimente satisfac ecuația lui Poisson: $p_1V_1^{\gamma}=p_0V_{01}^{\gamma}$, $p_2V_2^{\gamma}=p_0V_{02}^{\gamma}$ și $p_3V_3^{\gamma}=p_0V_{03}^{\gamma}$.	0,3	
	După efectuarea înlocuirilor și folosirea relației de aproximare menționată în nota de la finalul enunțului, se obțin următoarele rezultate pentru cele trei presiuni: $p_1\cong p_0\left(1-\frac{\gamma x}{2l}\right)$, $p_2\cong p_0\left(1-\frac{\gamma x}{3l}\right)$ și $p_3=p_0\left(1+\frac{\gamma x}{2l}\right)$.	0,3	
	Forța rezultantă ce acționează asupra celor două pistoane este: $F_{rez}=(p_1-p_2)S_1+(p_2-p_3)S_2$	0,3	
	Prin înlocuirea presiunilor (p_1, p_2 și p_3), a ariilor (S_1 și S_2) și a exponentului adiabatic $\gamma=\frac{5}{3}$ se obține: $F_{rez}=-\frac{55p_0S}{18l}x$	0,5	
	Deci forța rezultantă care readuce pistoanele spre poziția lor de echilibru este de tip elastic, iar constanta elastică echivalentă are expresia: $k_{ech.}=\frac{55p_0S}{18l}$.	0,5	
	Perioada micilor oscilații efectuate de cele două pistoane este: $T_{osc.}=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k_{ech.}}}$.	0,5	
	După înlocuirea maselor și constantei elastice echivalente se obține: $T_{osc.}=2\pi\sqrt{\frac{54ml}{55p_0S}}$.	0,5	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr><td rowspan="10">b.</td><td>Întrucât cilindrii sunt rigizi și confecționați din materiale termoizolatoare, energia totală a sistemului format din cele două pistoane împreună cu gazele ideale închise în cele trei compartimente se conservă:
$E_i = E_f$.</td><td>0,5</td><td rowspan="10">3,5 p</td></tr>
<tr><td>Energia totală în starea inițială a sistemului este:
$E_i = \frac{3mv_{max}^2}{2} + \nu_1 C_V T_0 + \nu_2 C_V T_0 + \nu_3 C_V T_0$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Energia totală în starea finală a sistemului este:
$E_f = \nu_1 C_V T_1 + \nu_2 C_V T_2 + \nu_3 C_V T_3$,
în care T_1, T_2 și T_3 sunt temperaturile finale ale gazelor închise în cele trei compartimente.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Se obține pentru viteza maximă relația:
$v_{max} = \sqrt{\frac{R}{m}\left[\nu_1 (T_1 - T_0) + \nu_2 (T_2 - T_0) + \nu_3 (T_3 - T_0)\right]}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Pentru exprimarea temperaturilor finale T_1, T_2 și T_3 putem folosi ecuația transformării adiabatice scrisă sub forma:
$TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$ sau $T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Volumele inițiale ocupate de gazele închise în cele trei compartimente înainte de momentul ciocnirii cu peretele masiv (care au fost deja exprimate și punctate la rezolvarea punctului a) sunt:
$V_{01} = 2lS_1 = 2Sl$, $V_{02} = (S_1 + S_2)l = 3Sl$ și $V_{03} = 2lS_2 = 4Sl$.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Volumele finale ocupate de gazele închise în cele trei compartimente în momentul opririi pistoanelor sunt:
$V_1 = 3lS_1 = 3Sl$, $V_2 = 2lS_2 = 4Sl$ și $V_3 = lS_2 = 2Sl$.</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>După înlocuire se obțin următoarele rezultate pentru temperaturi:
$T_1 = T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $T_2 = T_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ și $T_3 = T_0 \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{3}}$.</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>Pentru a cantitățile de gaz din cele trei compartimente putem folosi ecuația termică de stare a gazului ideal scrisă pentru starea gazelor ce corespunde poziției de echilibru a pistoanelor:
$p_0 V_0 = \nu R T_0$ sau $\nu = \frac{p_0 V_0}{R T_0}$.</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Se obține:
$\nu_1 = \frac{p_0 V_{01}}{R T_0} = \frac{2 p_0 S l}{R T_0}$, $\nu_2 = \frac{p_0 V_{02}}{R T_0} = \frac{3 p_0 S l}{R T_0}$ și $\nu_3 = \frac{p_0 V_{03}}{R T_0} = \frac{4 p_0 S l}{R T_0}$.</td><td>0,3</td></tr>
</table>

	Rezultat final: $v_{max} = \sqrt{\frac{p_0 Sl}{m}\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 4\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{3}} - 9\right]}$.	0,2	
c.	Presiunile gazelor pot fi determinate cu ecuația lui Poisson scrisă pentru stările de dinaintea ciocnirii cu peretele masiv și stările ce corespund momentului în care pistoanele sau oprit: $pV^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$ sau $p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$.	0,5	**2,0 p**
	Înlocuind volumele inițiale și finale pentru cele trei gaze monoatomice ($\gamma = \frac{5}{3}$) se obține: $p_1 = p_0\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$, $p_2 = p_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{3}}$ și $p_3 = p_0\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{5}{3}}$.	1,5	
	O a doua variantă de rezolvare a punctului c) se bazează pe utilizarea ecuației Clapeyron - Mendeleev scrisă pentru stările ce corespund momentului în care pistoanele sau oprit, folosind expresiile cunoscute de la rezolvarea punctului b) pentru cantitățile de gaz (ν_1, ν_2 și ν_3), pentru temperaturilor finale (T_1, T_2 și T_3) și pentru volumele finale (V_1,V_2 și V_3).	-	
Oficiu			**1 p**
Total subiectul II			**10 p**

<table>
<tr><th colspan="2">Barem Subiectul III – Tubul lui Kundt</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>a.</td><td>Sarcina de lucru nr. 1</td><td></td><td rowspan="5">1,0 p</td></tr>
<tr><td></td><td>- în tub se formează unde staționare longitudinale, ca urmare a interferenței undei sonore produse de oscilațiile discului D cu unda reflectată de discul D’.</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td></td><td>- În nodurile de presiune, amplitudinea variațiilor de presiune este nulă, dar viteza mișcării ordonate a particulelor de aer este maximă; în ventrele de presiune, amplitudinea variațiilor de presiune este maximă, dar viteza este nulă.</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>- Pulberea fină din tub este antrenată de mișcarea aerului. Deoarece în nodurile de presiune viteza aerului este maximă, pulberea este îndepărtată din nodurile de presiune și acumulată în ventre, formând grămăjoarele observate.</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>- Grămăjoarele sunt echidistante deoarece în unda staționară distanța dintre două ventre alăturate este $d = \frac{\lambda}{2}$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>Sarcina de lucru nr. 2</td><td></td><td rowspan="9">3,5 p</td></tr>
<tr><td></td><td>- Completarea unui tabel cu valorile calculate ale perioadei și lungimii de undă
<table>
<tr><th>Nr. crt.</th><th>$T\ /10^{-4}\text{s}$</th><th>$\lambda\ /10^{-2}\text{m}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2,5</td><td>8,0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3,0</td><td>10,0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3,3</td><td>11,0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4,0</td><td>14,0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5,0</td><td>16,0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6,25</td><td>21,0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>9,1</td><td>30,0</td></tr>
<tr><td>8</td><td>10,0</td><td>33,0</td></tr>
</table></td><td>1,6</td></tr>
<tr><td></td><td>$\lambda = \text{v} \cdot T$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td></td><td>- Alegerea scalei pe cele două axe astfel încât graficul să ocupe cât mai bine suprafața de hârtie milimetrică disponibilă (pentru precizie ridicată)</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>- Indicarea pe axe a mărimilor fizice, a unităților de măsură și a valorilor numerice</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>- Reprezentarea celor 8 puncte experimentale</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td></td><td>- Trasarea dreptei care reprezintă dependența cerută, prin origine și printre punctele experimentale</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>- Calcularea vitezei sunetului ca pantă a graficului. Se acceptă valori între $330\frac{\text{m}}{\text{s}}$ și $334\frac{\text{m}}{\text{s}}$</td><td>0,2</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

c.	**Sarcina de lucru nr. 3**		**1,5 p**
	Sunetul emis de tija de alamă creează unde staționare în aerul din tubul lui Kundt, iar distanța dintre două grămăjoare consecutive este $d=\frac{\lambda_{aer}}{2}$	0,3	
	Frecvența oscilațiilor este: $\nu=\frac{v_{aer}}{\lambda_{aer}}$	0,3	
	Tija oscilează în modurile proprii ale unei bare fixate la mijloc și liberă la capete. Lungimea este relativ mică, deci este avantajat modul fundamental: $\ell=\frac{\lambda_{alamă}}{2}$	0,3	
	$v_{alamă}=\lambda_{alamă}\cdot\nu \Rightarrow v_{alamă}=\frac{v_{aer}\cdot\ell}{d}$	0,3	
	Numeric: $v_{alamă}=3,5\cdot10^3\,\frac{m}{s}$	0,3	
d.	**Sarcina de lucru nr. 4**		**1,5 p**
	$v=v(p,\rho)\Rightarrow v=a\cdot p^{\alpha}\cdot\rho^{\beta}$, unde a este o constantă adimensională	0,3	
	$\langle v\rangle=\frac{m}{s}$ sau $[v]=L\cdot T^{-1}$	0,2	
	$\langle p\rangle=\frac{kg}{m\cdot s^2}$ sau $[p]=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$	0,2	
	$\langle \rho\rangle=\frac{kg}{m^3}$ sau $[\rho]=M\cdot L^{-3}$	0,2	
	Obținem: $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\-\alpha-3\beta=1\\-2\alpha=-1\end{cases}$	0,3	
	Rezultă $\alpha=\frac{1}{2}$ și $\beta=-\frac{1}{2}$, deci $v=a\cdot\sqrt{\frac{p}{\rho}}$	0,3	
e.	**Sarcina de lucru nr. 5**		**1,5 p**
	$pV=\nu RT\Rightarrow\frac{p}{\rho}=\frac{RT}{\mu}$	0,2	
	rezultă $v=a\cdot\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$	0,2	
	$\frac{v}{v_0}=\sqrt{\frac{T}{T_0}}$	0,2	
	$\frac{v}{v_0}=\sqrt{\frac{T_0+\Delta T}{T_0}}\Rightarrow v=v_0\sqrt{1+\frac{t}{T_0}}$	0,2	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Pentru valori mici ale raportului $\frac{t}{T_0}$ obținem $v = v_0 + \frac{v_0}{2T_0}t$	0,2	
	v_0 are semnificația de viteză a sunetului în aer la $0°C$, deci are valoarea determinată la sarcina de lucru nr. 2	0,2	
	$k = \frac{v_0}{2T_0} \Rightarrow k = 0,6\frac{m}{s \cdot K}$	0,3	
Oficiu			**1 p**
Total subiectul III			**10 p**

Barem propus de:
***Prof. dr. Adrian BODNARESCU**, Colegiul Național „Eudoxiu Hurmuzachi”, Rădăuți*
***Prof. dr. Leonaș DUMITRAȘCU**, Liceul Teoretic “Mihail Kogălniceanu”, Vaslui*
***Prof. Aura VĂSII**, Colegiul Național Militar „Dimitrie Cantemir”, Breaza*
***Prof. Liviu BLANARIU**, Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație, București*

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

XII

Olimpiada de Fizică
Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București
9 martie 2025

Subiectul I

Circuite curent alternativ ***(10 puncte)***

Un elev studiază diferite circuite de curent electric alternativ pe care le alimentează de la o sursă de tensiune electrică alternativă sinusoidală, a cărei valoare efectivă este constantă, $U = 30$ V și a cărei frecvență poate fi modificată într-un domeniu foarte larg. Rezistoarele și condensatoarele utilizate au un comportament care poate fi aproximat ca fiind ideal, iar conductoarele de legătură au o rezistență electrică neglijabilă.

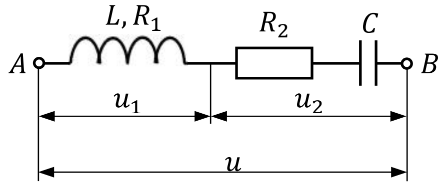


figura 1.1

Elevul realizează circuitul electric serie prezentat în figura 1.1 și reglează frecvența tensiunii electrice u de la bornele circuitului la valoarea constantă $\nu = 200$Hz.
În această situație circuitul are un comportament inductiv, tensiunea electrică de la bornele bobinei are valoarea efectivă $U_1 = 20$ V, tensiunea electrică de la bornele grupării serie R_2C are valoarea efectivă $U_2 = 15$ V, intensitatea curentului electric are valoarea efectivă $I = 0{,}1$ A, iar diferența de fază dintre tensiunea de la bornele circuitului și intensitatea curentului electric este $\varphi = 20^{\circ}$.

a. Determinați valorile inductanței L și rezistenței electrice R_1 ale bobinei precum și valorile rezistenței electrice R_2 și capacității electrice C a condensatorului.

Utilizând bobina L, R_1, condensatorul C și rezistorul R_2 elevul realizează circuitul electric prezentat în figura 1.2, modifică în mod continuu frecvența tensiunii electrice de la bornele A și B ale circuitului și studiază dependența $I = f(\nu)$, a intensității efective a curentului electric furnizat de sursă de frecvența tensiunii de alimentare.

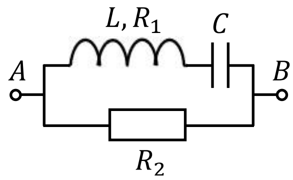


figura 1.2

b. Determinați valoarea frecvenței de rezonanță a circuitului;
c. Calculați valorile extreme ale **intensității efective** a curentului electric furnizat de sursă circuitului electric și reprezentați grafic, calitativ, dependența acestei intensități de frecvența tensiunii de alimentare, $I = f(\nu)$;
d. Demonstrați că între frecvențele de tăiere ν_1 și ν_2, care delimitează banda de trecere a circuitului și frecvența de rezonanță a circuitului există relația $\nu_1 \cdot \nu_2 = \nu_0^2$. *(Banda de trecere a circuitului reprezintă intervalul de frecvențe pentru care intensitatea efectivă* $I \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$*.)*

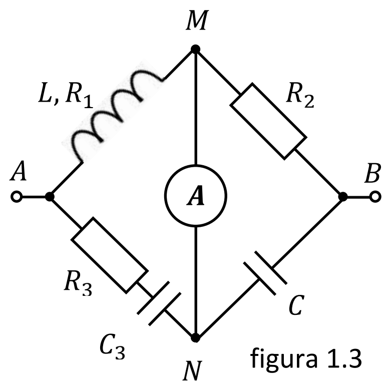


figura 1.3

Elevul realizează circuitul electric prezentat în figura 1.3, folosind aceleași elemente de circuit (bobina L, R_1, condensatorul C și rezistorul R_2), dar și un rezistor R_3 înseriat cu condensatorul C_3.

e. Determinați valorile rezistenței electrice R_3 și a capacității electrice C_3 pentru ca ampermetrul conectat între punctele M și N să nu fie parcurs de curent electric.

---

1. Fiecare dintre subiectele I, II, respectiv III se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

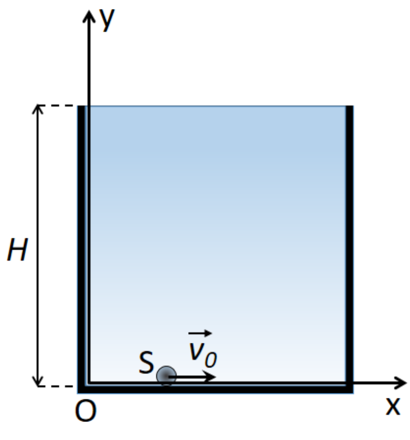
Subiectul II
Imagini în dioptrul plan ***(10 puncte)***

A. Un vas cilindric, având înălțimea H, este umplut cu un lichid transparent care are indicele de refracție n_0. Pe fundul vasului este fixată o sursă punctiformă de lumină, **S**, care este privită de un observator de deasupra vasului, pe direcția normalei la suprafața lichidului și care trece prin sursa de lumină. Determină expresia matematică a distanței dintre sursa **S** și imaginea acesteia văzută de observator.

B. Un vas cilindric, cu înălțimea $2H$, conține două lichide nemiscibile, fiecare dintre ele având înălțimea H, și indicii de refracție n_1 și respectiv n_2. Pe fundul vasului, în lichidul cu indicele de refracție n_1, este fixată o sursă punctiformă de lumină, **S**, care este privită de un observator de deasupra vasului, pe direcția normalei la suprafața lichidului și care trece prin sursa de lumină. Determină expresia matematică a distanței dintre sursa **S** și imaginea acesteia văzută de observator.

C. Vasul cilindric, având înălțimea H, este umplut cu un lichid transparent cu indicele de refracție dependent de înălțimea y, măsurată de la baza vasului, conform relației $n = n_0\left(1+\varepsilon\frac{y}{H}\right)$, unde ε este o constantă pozitivă $(\varepsilon < 1)$. Pe fundul vasului este fixată o sursă punctiformă de lumină, **S**, care este privită de un observator de deasupra vasului, pe direcția normalei la suprafața lichidului și care trece prin sursa de lumină. Determină expresia matematică a distanței dintre sursa **S** și imaginea acesteia văzută de observator.

D. În condițiile punctului **C.**, o sferă omogenă de mici dimensiuni este lansată pe direcție orizontală din punctul $S(x_0,0)$, cu viteza v_0, ca în figura alăturată. Consideră cunoscute: densitatea lichidului ρ_0 (având aceeași valoare în orice punct din lichid), densitatea sferei $\rho_s\,(\rho_s < \rho_0)$, și accelerația gravitațională, g. Forțele de rezistență la deplasarea sferei în lichid se neglijează. Sfera este privită de un observator situat la distanță mare față de suprafața lichidului. Consideră că vasul este suficient de larg astfel încât sfera ajunge la suprafața lichidului fără să atingă peretele lateral.



a. Scrie ecuația traiectoriei imaginii sferei văzută de observator în timpul deplasării sferei în lichid. Particularizează rezultatul obținut pentru $\varepsilon = 0$.
b. Determină dependența de timp a vitezei imaginii sferei văzută de observator în timpul deplasării sferei în lichid. Particularizează rezultatul obținut pentru $\varepsilon = 0$.
<u>*Note:*</u>

i) În analiza fenomenelor optice prezentate utilizează aproximația paraxială.

ii) Indicele de refracție al aerului se consideră $n_{aer} = 1$.

Subiectul III
Întâlnirile navelor cosmice relativiste **(10 puncte)**

Trei nave cosmice (A, B și C) se deplasează rectiliniu și uniform pe direcții paralele foarte apropiate, având față de o stea fixă, Σ, vitezele $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ și $\vec{v}_C$, pentru care $v_A > v_B > v_C$, toate aceste valori fiind comparabile cu viteza luminii în vid, *c*, dar mai mici decât aceasta, și ale căror orientări sunt reprezentate în desenul din figura 1, astfel încât vitezele relative ale navelor cosmice A și respectiv C, în raport cu nava cosmică B, date de expresiile:

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}{c^2}}; \quad \vec{v}_{CB} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_C \cdot \vec{v}_B}{c^2}},$$

sunt egale în modul și de sens contrar: $v_{AB} = v_{CB} = v$; $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{CB}$.

Fiecare navă cosmică este dotată cu un ceasornic propriu.

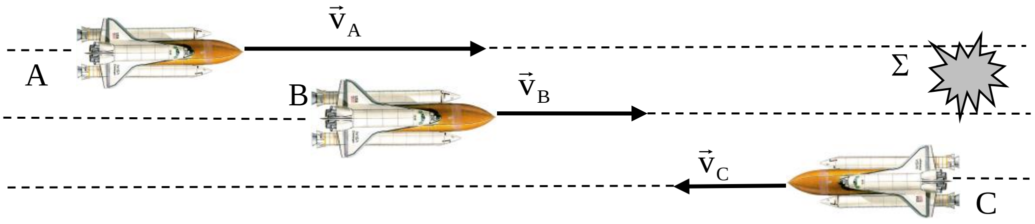


Fig. 1

Se realizează mai întâi întâlnirea navelor cosmice A și B, atunci când nava cosmică A depășește nava cosmică B, și când ceasornicele acestor nave cosmice se sincronizează, astfel încât ambele ceasornice să indice ora “zero”. La următoarea întâlnire, realizată după întâlnirea navelor cosmice A și B, și anume întâlnirea navelor cosmice A și C, ceasornicul navei cosmice C se sincronizează după ceasornicul navei cosmice A, astfel încât ambele ceasornice indică ora t'.

a) *Să se determine* indicațiile t_B și respectiv t_C, ale ceasornicelor de pe navele cosmice B și C, la întâlnirea acestora, precum și diferența acestor indicații, $\Delta t = t_B - t_C$. Se cunoaște viteza luminii în vid, *c*.

Să se particularizeze rezultatul obținut pentru varianta nerelativistă ($v \ll c$).

Se știe că, dacă Δt_0 este durata unui proces, desfășurat într-un punct fix, P_0, din sistemul inerțial mobil, Σ_0, înregistrată de ceasornicul observatorului O_0, aflat în originea sistemului inerțial mobil, Σ_0, care se află în mişcare rectilinie și uniformă, față de un sistem inerțial fix, Σ, cu viteza v_0, atunci durata aceluiași proces, determinată de ceasornicul observatorului O, aflat în originea sistemului inerțial fix, Σ, este dată de expresia:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} > \Delta t_0.$$

b) Cunoscând valorile vitezelor navelor cosmice, A și C, $v_A > v_C$, față de steaua Σ, *să se determine* valorile posibile, v_B, ale vitezei navei cosmice B, față de steaua Σ, astfel încât vitezele relative ale navelor cosmice A și respectiv C, în raport cu nava cosmică B, ale căror expresii au fost deja precizate, să fie egale în modul și de sens contrar ($\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{CB}$).

Să se justifice rezultatul. *Caz particular* : $v_A \ll c$; $v_C \ll c$; $v_A - v_C \ll c$.

c) *Să se stabilească* noile elemente ale vectorului $\vec{v}_B$, (orientare și modul), reprezentând viteza navei cosmice B în raport cu steaua Σ, dacă observatorul din nava cosmică A apreciază că nava cosmică B se deplasează, în raport cu el, cu viteza $\vec{v}_{BA} \perp \vec{v}_A$, așa cum indică desenul din figura 2.

Se cunosc v_A și v_{BA}. *Să se particularizeze* rezultatul pentru varianta nerelativistă, $v << c$.

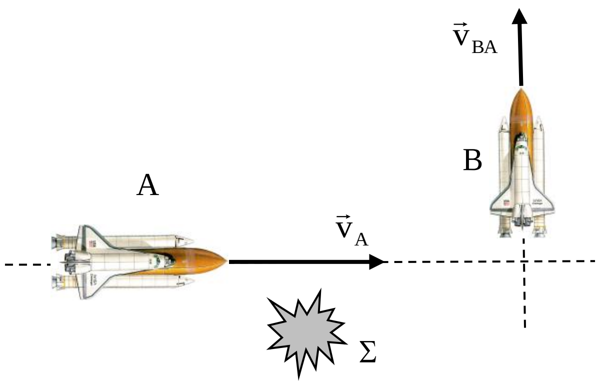


Fig. 2

Pentru un punct material P, aflat în mișcare, în planul comun al sistemelor de coordonate, inerțiale, coplanare, $\Sigma(XOY)$, sistem inerțial fix și respectiv $\Sigma'(X'O'Y')$, sistem inerțial aflat în mișcare rectilinie și uniformă, cu viteza $\vec{v}_0$, față de sistemul fix, reprezentate în desenul din figura 3, se cunosc relațiile dintre componentele vitezelor punctului material P, raportate la axele celor două sisteme de referință, precum și relația dintre indicațiile ceasornicelor observatorilor O și respectiv O', din originile celor două sisteme de referință, Σ și respectiv Σ':

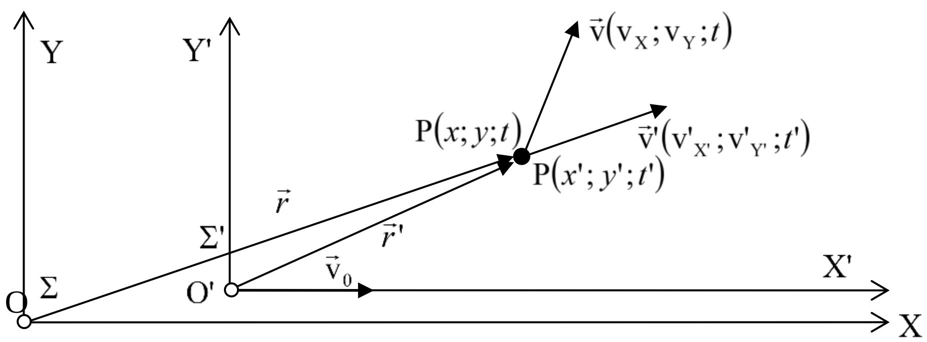


Fig. 3

$$v_X = \frac{v'_{X'} + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} \cdot v'_{X'}}; \quad v_Y = \frac{v'_{Y'}}{1 + \frac{v_0}{c^2} \cdot v'_{X'}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}; \quad t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Subiectele au fost propuse de:
***Prof. Florin Butușină**, Colegiul Național "Simion Bărnuțiu", Șimleu Silvaniei*
***Prof.dr. Costin Dobrotă**, Colegiul Național "Dimitrie Cantemir", Onești*
***Prof.dr. Mihail Sandu**, Universitatea din Craiova*

1. Fiecare dintre subiectele I, II, respectiv III se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

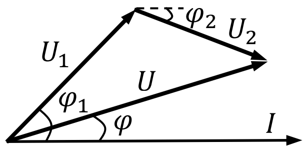
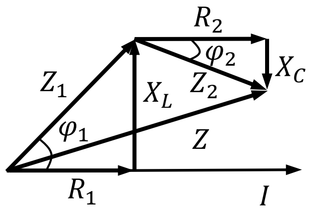
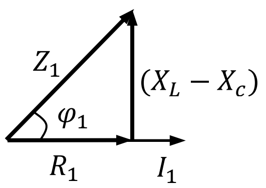
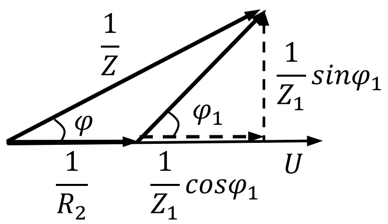
Olimpiada de Fizică

Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București

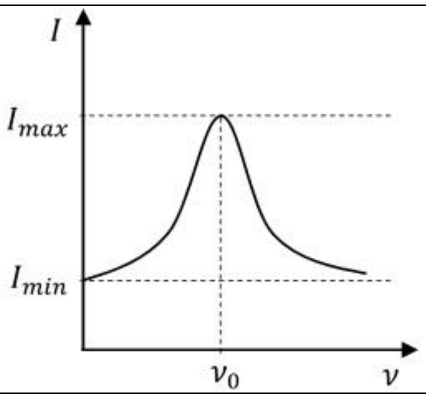
9 martie 2025

Barem de evaluare și de notare

XII

	Barem Subiectul I ***Circuite curent alternativ***	**Parțial**	**Punctaj**
	Pe baza reprezentărilor fazoriale putem scrie următoarele relații:	0,5p	
a.	$R_1 = Z_1 cos\varphi_1$; $X_L = Z_1 sin\varphi_1$ $R_2 = Z_2 cos\varphi_2$; $X_C = Z_2 sin\varphi_2$	0,4p	**2,5p**
	$Z_1 = \frac{U_1}{I}$; $Z_2 = \frac{U_2}{I}$	0,4p	
	$U_2^2 = U^2 + U_1^2 - 2UU_2 cos(\varphi_1 - \varphi)$ $U_1^2 = U^2 + U_2^2 - 2UU_1 cos(\varphi_2 + \varphi)$	0,8p	
	$\varphi_1 \cong 46{,}38^o$ $\varphi_2 \cong 16{,}34^o$		
	$R_1 \cong 138\Omega$; $(X_L \cong 144{,}79\Omega)$; $L \cong 115{,}28$mH; $R_2 \cong 144\Omega$; $(X_C \cong 42{,}20\Omega)$; $C \cong 18{,}87\mu$F	0,4p	
	Impedanța circuitului este dată de relația: $\bar{Z} = \frac{R_2[R_1 + j(X_L - X_C)]}{R_2 + R_1 + j(X_L - X_C)} = R_2 \frac{R_1(R_1+R_2) + (X_L - X_C)^2}{(R_1+R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} + jR_2{}^2 \frac{X_L - X_C}{(R_1+R_2)^2 + (X_L - X_C)^2}$ La rezonanță $Im\,\bar{Z} = 0 \Rightarrow (X_L - X_C) = 0$, respectiv $X_L = X_C$ și de aici obținem $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 108\,Hz$.	1p	
b.	*O altă abordare:* Utilizând reprezentarea fazorială: la rezonanță defazajul trebuie să fie nul, $\varphi = 0^o$, respectiv: $\frac{1}{Z}sin\varphi = \frac{1}{Z_1}sin\varphi_1 = \frac{X_L - X_C}{Z_1^2} = 0 \Rightarrow (X_L - X_C) = 0$, respectiv $X_L = X_C$ și de aici obținem $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 108\,Hz$.	(1p)	**1p**
c.	La frecvențe foarte mici, $\omega \to 0$, $X_C \to \infty$, condensatorul împiedică trecerea curentului prin ramura LC, deci curentul va trece doar prin rezistorul R_2, valoarea efectivă fiind: $I_{min} = I_2 = \frac{U}{R_2} \cong 208mA$.	0,5p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	La frecvențe foarte mari, $\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$, bobina împiedică trecerea curentului prin ramura LC, deci curentul va trece doar prin rezistorul R_2, valoarea efectivă fiind: $I_{min} = I_2 = \frac{U}{R_2} \cong 208mA.$	0,5p	**2,5p**
	În aceste situații, impedanța are valoarea maximă, $Z_{max} = R_2$		
	La frecvența de rezonanță $X_L = X_C$, ramura L, R_1, C are un comportament pur rezistiv, curentul din această ramură are intensitatea efectivă: $I_1 = \frac{U}{R_1} \cong 217\ mA.$ Curentul total (circuit pur rezistiv) va avea valoarea efectivă: $I_0 = I_{max} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_p} = 425mA$ În această situație impedanța are valoare minimă: $Z_{min} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	0,5p	
	O altă abordare: $I = \frac{U}{Z} = U\sqrt{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_1}cos\varphi_1\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_1}sin\varphi_1\right)^2}$ După calcule obținem: $I = U\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ Atât la frecvențe foarte mici, cât și la frecvențe foarte mari: $\left.\begin{matrix}\omega \to 0\\ \omega \to \infty\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \to \infty$ și intensitatea efectivă va fi minimă, $I_{min} = I_2 = \frac{U}{R_2} \cong 208mA.$ La rezonanță $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$ și intensitatea efectivă va fi maximă, $I_{max} = U\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1^2}} = U\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{U}{R_p} = 425mA$	(1,5p)	
	Reprezentare grafică: 1p  	1p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

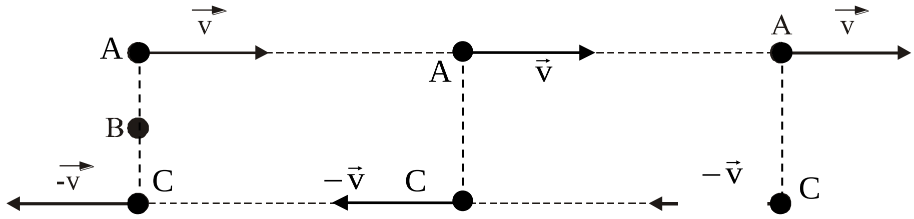
<table>
<tr><td rowspan="4">d.</td><td>$$I \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow Z \leq \sqrt{2} \cdot Z_{min}$$</td><td>0,5p</td><td rowspan="4">2p</td></tr>
<tr><td>Din ecuația $\frac{U}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U}{Z_{min}}$, respectiv,
$$\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2}\right) \frac{1}{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$
se obține după calcule relația:
$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R_1^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2 + 2R_1 R_2 - R_1^2} = a^2$$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>Putem scrie ecuația: $LC\omega^2 \pm aC\omega - 1 = 0$.
Soluțiile pozitive acestei ecuații reprezintă pulsațiile de tăiere:
$$\omega_1 = \frac{-aC + \sqrt{a^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$
și
$$\omega_2 = \frac{aC + \sqrt{a^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Se observă cu ușurință că:
$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{a^2C^2 + 4LC - a^2C^2}{4L^2C^2} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$
respectiv, $\nu_1 \cdot \nu_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = \nu_0^2$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>e.</td><td>Pentru ca prin ampermetru să nu treacă curent trebuie îndeplinită relația:
$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{X}_C = \bar{R}_2 \cdot \bar{Z}_3$$
$$(R_1 + jL\omega)\left(-j\frac{1}{C\omega}\right) = R_2\left(R_3 - j\frac{1}{C_3\omega}\right)$$</td><td>0,4</td><td rowspan="4">1p</td></tr>
<tr><td></td><td>$$\frac{L}{C} - j\frac{R_1}{C\omega} = R_2R_3 - j\frac{R_2}{C_3\omega}$$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>Obținem:
$R_3 = \frac{L}{R_2C}$ și $C_3 = C\frac{R_2}{R_1}$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td></td><td>$R_3 \cong 42{,}42\Omega$ și $C_3 \cong 19{,}69\mu F$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Oficiu</td><td></td><td>1p</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total subiectul I</td><td></td><td>10p</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Barem Subiectul II ***Imagini în dioptrul plan***	**Parțial**	**Punctaj**
A	Imaginea sursei S se află la distanța *y* față de suprafața lichidului: $\frac{y}{n_{aer}} = \frac{H}{n_0}$	0,3p	**0,5p**
	Distanța dintre sursă și imaginea sursei: $\Delta y = H\left(1 - \frac{1}{n_0}\right)$	0,2p	
B	Imaginea S_1 a sursei S în dioptrul plan care separă cele două lichide nemiscibile se află la distanța y_1 față de suprafața de separare a lichidelor: $\frac{y_1}{n_2} = \frac{H}{n_1}$	0,3p	**1p**
	Imaginea S_2 a obiectului S_1 în dioptrul plan care separă cel de-al doilea lichid de aer se află la distanța y_2 față de această suprafață: $\frac{y_2}{n_{aer}} = \frac{H + y_1}{n_2}$	0,3p	
	Distanța dintre sursă și imaginea sursei: $\Delta y = 2H - y_2$	0,2p	
	Obținem: $\Delta y = H\left(2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$	0,2p	
C	Imaginea sursei în stratul cu grosimea elementară dy se formează, față de sursă, la distanța: $dY = \left(1 - \frac{1}{n_0\left(1 + \varepsilon \frac{y}{H}\right)}\right) dy$	0,5p	**2p**
	Integrăm pentru întregul lichid: $\int_0^{\Delta Y} dY = \int_0^H \left(1 - \frac{1}{n_0\left(1 + \varepsilon \frac{y}{H}\right)}\right) dy$	1p	
	Obținem: $\Delta Y = H\left(1 - \frac{1}{\varepsilon n_0} \ln(1 + \varepsilon)\right)$	0,5p	
D **a.**	Coordonatele sferei în timpul mișcării sale sunt: $x_s = x_0 + v_0 t$	0,3p	**3p**

	$y_s = \frac{a}{2}t^2$		
	Accelerația sferei la deplasarea în lichid: $a = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1\right)g$	0,3p	
	Ecuația traiectoriei sferei, $y_s = f(x_s)$: $y_s = \frac{g}{2v_0^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1\right)(x_s - x_0)^2 = k \cdot (x_s - x_0)^2$	0,3p	
	Coordonata, X, a imaginii unui punct de pe traiectoria sferei este egală cu coordonata x_s a sferei: $X = x_s$	0,3p	
	Notăm cu Y coordonata imaginii punctului de coordonată y_s de pe traiectoria sferei. Distanța dintre cele două puncte conjugate este: $\Delta Y = Y - y_s$	0,3p	
	Coordonata, Y, a imaginii unui punct de pe traiectoria sferei: $Y = y_s + \int_{y_s}^{H}\left(1 - \frac{1}{n_0\left(1 + \varepsilon\frac{y}{H}\right)}\right)dy$	0,5p	
	Obținem: $Y = H\left(1 - \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln\left(1 + \varepsilon\frac{y_s}{H}\right)}{\varepsilon n_0}\right)$ (*)	0,3p	
	Ecuația traiectoriei imaginii sferei: $Y = H\left(1 - \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln\left(1 + \varepsilon k\frac{(x_s - x_0)^2}{H}\right)}{\varepsilon n_0}\right)$	0,3p	
	$Y = H\left(1 - \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln\left(1 + \varepsilon k\frac{(x_s - x_0)^2}{H}\right)}{\varepsilon n_0}\right) = H\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) + \frac{k}{n_0}(x_s - x_0)^2$	0,4p	
D b.	Componenta, V_X, a vitezei imaginii unui punct de pe traiectoria sferei: $V_X = v_0$	0,2p	**2,5p**
	Componenta, V_Y, a vitezei imaginii unui punct de pe traiectoria sferei: $V_Y = \frac{dY}{dt}$	0,2p	

	Din relația (*): $V_Y = \frac{H}{\varepsilon n_0}\frac{d}{dt}\left(\ln\left(1+\varepsilon\frac{y_s}{H}\right)\right) = \frac{1}{n_0\left(1+\varepsilon\frac{y_s}{H}\right)}\frac{dy_s}{dt}$	1p	
	Componenta, v_{y_s} a vitezei sferei: $v_{y\_s} = at = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)gt$	0,5p	
	Obținem viteza imaginii: $V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{1}{n_0^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2H}\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)gt^2\right)^2}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)^2 g^2t^2}$	0,3p	
	Pentru $\varepsilon = 0 \Rightarrow V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{1}{n_0^2}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)^2 g^2t^2}$	0,3p	
Oficiu			**1p**
TOTAL			**10p**

Barem Subiectul III ***Întâlnirile navelor cosmice relativiste***	**Parțial**	**Punctaj**
a)	**3,00 p**	**3,00 p**
În desenul din figura 4 am considerat că nava cosmică B este un sistem de referinţă fix, faţă de care, în acord cu enunţul problemei, navele cosmice A şi C se deplasează cu vitezele relative $\vec{v}_{AB} = \vec{v}$ şi respectiv $\vec{v}_{CB} = -\vec{v}$, pentru care $v_{AB} = v_{CB} = v$, astfel încât, cele două viteze relative sunt egale în modul și de sens contrar, $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{CB}$.  **Fig. 4**	0,50 p	
Ca urmare, distanţa parcursă de nava cosmică A în raport cu nava cosmică B, de la întâlnirea navelor cosmice A – B până la întâlnirea navelor cosmice A – C, este egală cu distanţa parcursă de nava cosmică C în raport cu nava cosmică B, de la întâlnirea navelor cosmice C – A, până la întâlnirea navelor cosmice C – B. Deplasarea navei cosmice A, de la întâlnirea cu nava cosmică B, când ceasornicele acestora s-au sincronizat, ambele să indice ora ”zero” şi până la întâlnirea navei cosmice A cu nava cosmică C, este un proces a cărui durată, măsurată cu ceasornicul navei cosmice A, se identifică chiar cu indicaţia t' a ceasornicului navei cosmice A, indicație precizată în enunțul problemei, aceasta reprezentând timpul propriu al ceasornicului navei cosmice A, la întâlnirea cu nava cosmică C. Durata aceluiaşi proces, (deplasarea navei cosmice A, de la întâlnirea cu nava cosmică B, până la întâlnirea cu nava cosmică C), măsurată cu ceasornicul navei cosmice B (din sistemul fix al navei cosmice B) este: $$t_{1B} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$ identificându-se chiar cu indicaţia ceasornicului navei cosmice B, în momentul întâlnirii navei cosmice A cu nava cosmică C.	1,00 p	
De la întâlnirea navelor cosmice A şi C, când, sincronizându-se cu ceasornicul navei cosmice A, ceasornicul navei C indică şi el ora t', şi până la întâlnirea navelor cosmice C şi B, deplasarea navei cosmice C în raport cu nava cosmică B reproduce, în sens invers, deplasarea navei cosmice A în raport cu nava cosmică B.		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Ca urmare, durata deplasării navei cosmice C de la întâlnirea sa cu nava cosmică A şi până la întâlnirea navei cosmice C cu nava cosmică B, măsurată cu ceasornicul navei cosmice C este t', astfel încât indicaţia ceasornicului navei cosmice C la întâlnirea sa cu nava cosmică B este $t_C = 2t'$, reprezentând timpul propriu al navei cosmice C la întâlnirea sa cu nava cosmică B. Durata aceluiaşi proces, determinată cu ceasornicul navei cosmice B (din sistemul fix al navei cosmice B) va fi: $$t_{2B} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t_{1B},$$ astfel încât indicaţia ceasornicului navei cosmice B la întâlnirea cu nava cosmică C este: $$t_B = t_{1B} + t_{2B} = \frac{2\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$	1,00 p	
Diferenţa indicaţiilor ceasornicelor din navele cosmice B şi C la întâlnirea navelor cosmice B şi C este: $$\Delta t = t_B - t_C = \frac{2\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 2t' = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)t'.$$ În variantă nerelativistă, când $v << c$, rezultă $\Delta t = 0$.	0,50 p	
b)	**3,00 p**	**3,00 p**
Adoptând ca *sistem inerţial fix*, sistemul S, reprezentat în desenul din figura 5, sistem ataşat stelei Σ, sistem faţă de care cele trei nave cosmice sunt în mişcări rectilinii şi uniforme, cu vitezele $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ şi respectiv $\vec{v}_C$, precizate în enunțul problemei, iar *ca sistem inerţial mobil*, sistemul S′ ataşat navei cosmice B, şi ştiind că vitezele relative ale navelor cosmice A și C, în raport cu nava cosmică B, sunt date de relațiile: $$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1-\frac{\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B}{c^2}};\quad \vec{v}_{CB} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1-\frac{\vec{v}_C\cdot\vec{v}_B}{c^2}},$$ rezultă: $$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1-\frac{\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B}{c^2}} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1-\frac{v_A\cdot v_B}{c^2}};$$ $$\vec{v}_{CB} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1-\frac{\vec{v}_C\cdot\vec{v}_B}{c^2}} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1+\frac{v_C\cdot v_B}{c^2}};$$	0,50 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$$\vec{V}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \left(1 - \frac{v_A \cdot v_B}{c^2}\right) \cdot \vec{v}_{AB};\ \vec{V}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B = \left(1 + \frac{v_C \cdot v_B}{c^2}\right) \cdot \vec{v}_{CB}.$$

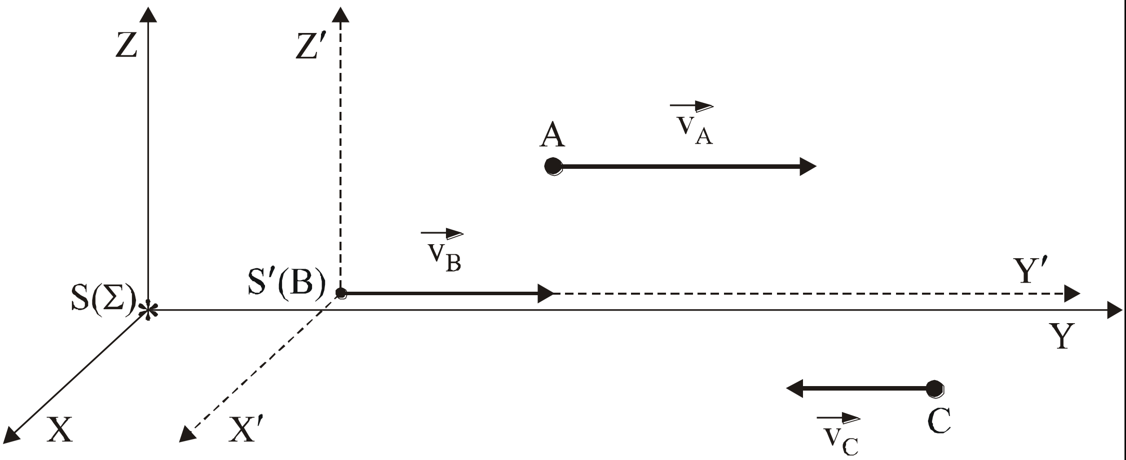


Fig. 5

Utilizând desenul din figura 6 rezultă:

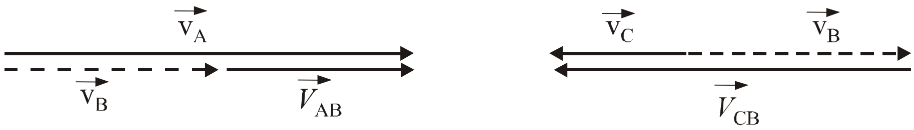


Fig. 6

$$V_{AB} = v_A - v_B = \left(1 - \frac{v_A \cdot v_B}{c^2}\right) \cdot v_{AB};$$

$$v_{AB} = \frac{v_A - v_B}{1 - \dfrac{v_A \cdot v_B}{c^2}};$$

$$V_{CB} = v_C + v_B = \left(1 + \frac{v_C \cdot v_B}{c^2}\right) \cdot v_{CB};$$

$$v_{CB} = \frac{v_C + v_B}{1 + \dfrac{v_C \cdot v_B}{c^2}};$$

1,50 p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr><td>

$$v_{AB} = v_{CB};\ \frac{v_A - v_B}{1-\frac{v_A \cdot v_B}{c^2}} = \frac{v_C + v_B}{1+\frac{v_C \cdot v_B}{c^2}};$$

$$(v_A - v_B)\cdot\left(1+\frac{v_C\cdot v_B}{c^2}\right) = (v_C + v_B)\cdot\left(1-\frac{v_A\cdot v_B}{c^2}\right);$$

$$v_A + \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} - v_B - \frac{v_B^2\cdot v_C}{c^2} = v_C - \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} + v_B - \frac{v_A\cdot v_B^2}{c^2};$$

$$v_A - v_C + \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} - 2\cdot v_B + \frac{v_A\cdot v_B^2}{c^2} - \frac{v_B^2\cdot v_C}{c^2} + \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} = 0;$$

$$v_A - v_C + 2\cdot\frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} - 2\cdot v_B + \frac{v_B^2}{c^2}\cdot(v_A - v_C) = 0;$$

$$\frac{v_A - v_C}{c^2}\cdot v_B^2 - 2\cdot\left(1-\frac{v_A\cdot v_C}{c^2}\right)\cdot v_B + (v_A - v_C) = 0;$$

$$\frac{v_A - v_C}{c^2}\cdot v_B^2 - 2\cdot\left(\frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{c^2}\right)\cdot v_B + (v_A - v_C) = 0;$$

$$v_B^2 - 2\cdot\frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C}\cdot v_B + c^2 = 0;$$

$$(v_B)_{1,2} = \frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C}\right)^2 - c^2}.$$

reprezentând valorile posibile ale vitezei navei cosmice B, în raport cu steaua Σ, astfel încât vitezele relative ale navelor cosmice A și respectiv C, în raport cu nava cosmică B, să fie egale în modul și de sens contrar, ($\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{CB}$), în raport cu steaua Σ.

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Caz particular : $v_A << c;\ v_C << c;$

1)

$$(v_B)_1 = \frac{c^2\left(1-\frac{v_A\cdot v_C}{c^2}\right)}{v_A - v_C} - \sqrt{c^4\cdot\left(\frac{1-\frac{v_A\cdot v_C}{c^2}}{v_A - v_C}\right)^2 - c^2};$$

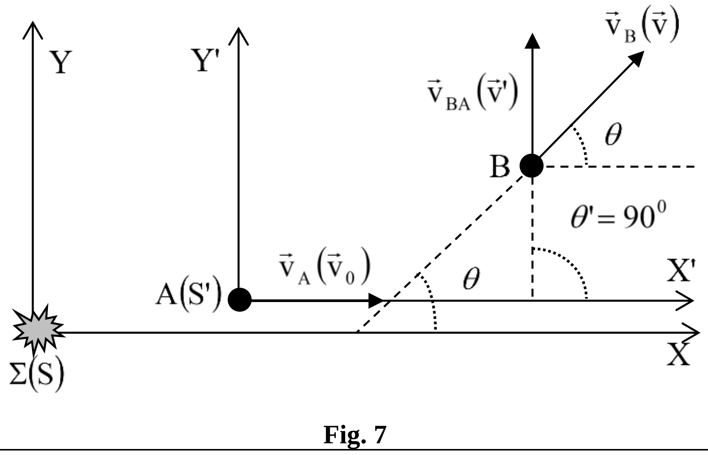
$$v_A\cdot v_C << c^2;\ \frac{v_A\cdot v_C}{c^2} << 1;$$

$$(v_B)_1 = \frac{c^2}{v_A - v_C} - \sqrt{\frac{c^4}{(v_A - v_C)^2} - c^2};$$

</td><td>0,50 p</td><td></td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$(v_B)_1 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} - \sqrt{\dfrac{c^4 - c^2\cdot(v_A - v_C)^2}{(v_A - v_C)^2}};$ $(v_B)_1 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} - \sqrt{\dfrac{c^4\cdot\left[1 - \dfrac{(v_A - v_C)^2}{c^2}\right]}{(v_A - v_C)^2}};$ $(v_B)_1 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} - \dfrac{c^2}{v_A - v_C}\cdot\sqrt{1 - \dfrac{(v_A - v_C)^2}{c^2}};$ $(v_B)_1 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} - \dfrac{c^2}{v_A - v_C}\cdot\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_A - v_C}{c}\right)^2};$ $\dfrac{v_A - v_C}{c} << 1;$ $(v_B)_1 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} - \dfrac{c^2}{v_A - v_C}\left(1 - \dfrac{(v_A - v_C)^2}{2c^2}\right);\ (v_B)_1 = \dfrac{v_A - v_C}{2};$ **2)** $(v_B)_2 = \dfrac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C} + \sqrt{\left(\dfrac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C}\right)^2 - c^2};$ $v_A\cdot v_C << c^2;\ \dfrac{v_A\cdot v_C}{c^2} << 1;$ $(v_B)_2 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} + \sqrt{\dfrac{c^4}{(v_A - v_C)^2} - c^2};$ $(v_B)_2 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} + \sqrt{\dfrac{c^4 - c^2\cdot(v_A - v_C)^2}{(v_A - v_C)^2}};$ $(v_B)_2 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} + \sqrt{\dfrac{c^4\cdot\left[1 - \dfrac{(v_A - v_C)^2}{c^2}\right]}{(v_A - v_C)^2}};$ $(v_B)_2 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} + \dfrac{c^2}{v_A - v_C}\cdot\sqrt{1 - \dfrac{(v_A - v_C)^2}{c^2}};$ $(v_B)_2 = \dfrac{c^2}{v_A - v_C} + \dfrac{c^2}{v_A - v_C}\cdot\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_A - v_C}{c}\right)^2};$ $\dfrac{v_A - v_C}{c} << 1;$	0,50 p	

$(v_B)_2 = \frac{c^2}{v_A - v_C} + \frac{c^2}{v_A - v_C};\ (v_B)_2 = \frac{2\cdot c^2}{v_A - v_C},$ dar, știind că $(v_B)_2 < c$, rezultă: $\frac{2\cdot c^2}{v_A - v_C} < c;\ \frac{2\cdot c}{v_A - v_C} < 1;\ 2\cdot c < v_A - v_C;$ $\frac{v_A - v_C}{2} > c,$ rezultat care nu poate fi acceptat!		
c)	**3,00 p**	**3,00 p**
Adoptând ca sistem inerţial fix, sistemul S din figura 7, ataşat stelei Σ, faţă de care navele cosmice A şi B sunt în mişcări rectilinii şi uniforme, iar ca sistem inerţial mobil, sistemul S′, ataşat navei cosmice A (în mişcare faţă de sistemul fix cu viteza $\vec{v}_A = \vec{v}_0$), atunci vitezele navei cosmice B în raport cu nava cosmică A (în raport cu sistemul mobil S′), $\vec{v}_{BA} = \vec{v}'$, şi în raport cu steaua Σ, $\vec{v}_B = \vec{v}$, au componentele : $(v')_{X'} = 0;\ (v')_{Y'} = v_{BA};\ (v)_X = v_B \cdot \cos\theta;\ (v)_Y = v_B \cdot \sin\theta,$ relaţiile dintre acestea, fiind precizate în enunţul problemei, rezultă:  **Fig. 7**	0,50 p	
$v_X = \frac{\Delta x}{\Delta t};\ v_Y = \frac{\Delta y}{\Delta t};\ \Delta y = \Delta y';$ $t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}};\ \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v_0}{c^2}\cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}};$ --- -	0,50 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$v_X=\dfrac{v'_{X'}+v_0}{1+\dfrac{v_0}{c^2}\cdot v'_{X'}}$; $v_Y=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{\Delta y'}{\dfrac{\Delta t'+\dfrac{v_0}{c^2}\cdot\Delta x'}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}}}=\dfrac{\dfrac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\dfrac{1+\dfrac{v_0}{c^2}\cdot\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}}}$; $v_Y=\dfrac{v'_{Y'}}{1+\dfrac{v_0}{c^2}\cdot v'_{X'}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}$; $(v)_X=\dfrac{(v')_{X'}+v_0}{1+\dfrac{v_0\cdot(v')_{X'}}{c^2}}$; $(v)_Y=\dfrac{(v')_{Y'}}{1+\dfrac{v_0\cdot(v')_{X'}}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}$,	1,00 p	
-- astfel încât, în acord și cu desenul din figura 3 din enunțul problemei, rezultă : $v_B\cdot\cos\theta=v_A$; $v_B\cdot\sin\theta=v_{BA}\cdot\sqrt{1-\dfrac{v_A^2}{c^2}}$; $v_B=\sqrt{v_A^2+v_{BA}^2\cdot\left(1-\dfrac{v_A^2}{c^2}\right)}$; $\dfrac{v_B\cdot\sin\theta}{v_B\cdot\cos\theta}=\tan\theta=\dfrac{v_{BA}\cdot\sqrt{1-\dfrac{v_A^2}{c^2}}}{v_A}=\dfrac{v_{BA}}{v_A}\cdot\sqrt{1-\dfrac{v_A^2}{c^2}}$.	0,50 p	
Variantă nerelativistă : $v_B=\sqrt{v_A^2+v_{BA}^2}$; $\tan\theta=\dfrac{v_{BA}}{v_A}$.	0,50	
Oficiu		**1,00 p**
Total subiectul II		**10 p**

Barem propus de:
***Prof. Florin Butușină**, Colegiul Național "Simion Bărnuțiu", Șimleu Silvaniei*
***Prof.dr. Costin Dobrotă**, Colegiul Național "Dimitrie Cantemir", Onești*
***Prof.dr. Mihail Sandu**, Universitatea din Craiova*